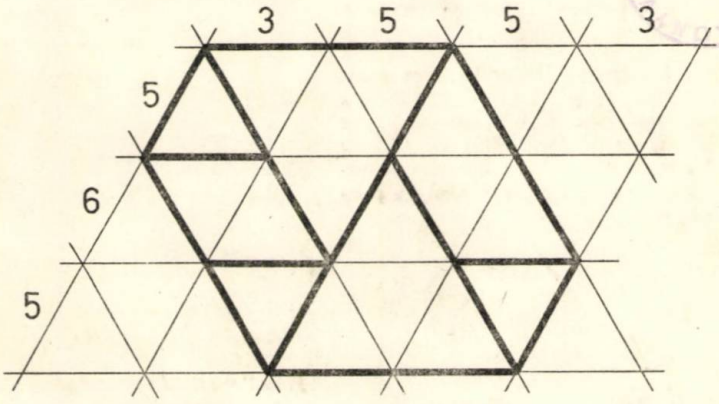
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1982. február * XXIX. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
82-5340 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1

Balázs László: Általános iskolai matematika-tagozatos 5. osztályok Heves megyében 6

dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag, II. osztály 2. rész) 9

Rácz János: Néhány feladat és megoldása ürügyén (1. rész) 14

FELADATOK 21

Szénásy Mihály: Módszertani segítség a középiskolai matematikatanároknak 32

СОДЕРЖАНИЕ

Элёд Иштванне: Что издано из программ, учебников и сопровождавщих пособий для начальных и средних школ? 1

Балаж Ласло: Пятые классы по специальности математики в начальных школах в комитате Хевеш 6

Д-р Коллер Ласлоне: Система программных требований по математике для профтехучилищ (Экспериментальный материал, кл. II., часть 2.) 9

Рац Янош: По поводу нескольких задач и их решений (часть 1.) 14

ЗАДАЧИ 21

Сенаши Михай: Методическая помощь преподавателям математики 32

INHALT

Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*): Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? 1

Balázs, László: 5. Klassen der Grundschule mit spezialem Mathematik-Lehrplan in Komitat Heves 6

Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen (Versuchsmaterial, II. Klasse 2. Teil) 9

Rácz, János: Unter dem Vorwand einiger Aufgaben und ihrer Lösungen (1. Teil) .. 14

AUFGABEN 21

Szénásy, Mihály: Methodische Hilfe den Mathematiklehrern der Mittelschulen ... 32

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1982. ÉVI XXIX. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1981. évi verseny eredménye 3/69
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 4/122
Balázs László: Általános iskolai matematikatagozatos 5. osztályok Heves megyében 1/6
Bogdán Zoltán: Néhány gondolat a gimnáziumi matematika-szakkör érdekében 2/56
Czeglédy István—Dr. Hajdu Sándor: Az oktatási-képzési folyamat tervezése (A matematikatanulás irányításáról III.) 5/129
Dr. Csirmaz László—Dr. Simonovits Miklós: Algoritmusok I. 2/47
Dr. Csirmaz László—Dr. Simonovits Miklós: Algoritmusok II. 3/75
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1/1
Gádor Endréné: Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1981. évi találkozójáról 3/85
Dr. Hajdu Sándor: Az értelmi cselekvések elemzésének egy modellje a matematikaoktatásban (A matematikatanítás irányításáról II.) 3/65
Helyreigazítás 6/188
Hódi Endre: Beszámoló a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 6/174
Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 33. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán 4/116
Dr. Horváth Jenő: Szabályos sokszögek néhány extremális tulajdonsága euklideszi és hiperbolikus síkon, valamint gömbfelületen 4/106
Dr. Horváth Miklós: A függvényfogalom néhány jellegzetessége a 17. században 5/140
Iker János: A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lehetőségei 6. osztályban 6/166
Kallós Károly: Ekvivalens tételek 4/97
Kamarás Lajos—Póla József: Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről I. 6/183
Dr. Koller Lászlóné: A szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei 5/148
Dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag, II. osztály 2. rész) 1/9
Közlemény a Nemzetközi Matematikai Kongresszusról 2/63
Közlemény a Nemzetközi Matematikai Kongresszus elhalasztásáról 3/III
Közlemény az 5. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 2/IV
Kun Péter: Egy lehetőség a matematikafeladatok pontozására 4/112
Dr. Laczkovich Miklós: A Bolyai János Matematikai Társulat matematikatanárok számára meghirdetett versenyének feladatmegoldásai 3/69
Ledneczky Ferenc: Geometriai modellező készlet 6/161
Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1981. évi vetélkedőjének országos fordulójáról 2/33
Olvasószolgálat 6/188
ORGTECHNIK '82 ..... 5/IV
Rácz János: Néhány feladat és megoldása ürügyén (1. rész) 1/14
Rácz János: Néhány feladat és megoldása ürügyén (2. rész) 2/41
Dr. Rédling Elemér: Alakzatok hasonlósága 4/101
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Kecskeméten 5/146
Dr. Surányi János: Hérón-féle háromszögekről 5/135
Szénásy Mihály: Módszertani segítség a középiskolai matematikatanároknak 1/32
Dr. Takáts Ágostonné: A függvényvonalzó használata a középiskolai matematikaoktatásban 5/143
Újvári István: Új matematika tankönyvek a felnőttoktatásban. 6/170
FELADATOK 1/21, 2/58, 3/88, 4/124, 5/152, 6/189

82-5454 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

ELŐD ISTVÁNNÉ
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

Az alábbiakban közöljük a már megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét a legszükségesebb bibliográfiai adatokkal, iskolatípusok szerinti csoportosításban. Minden esetben csak az utolsó kiadást jelöljük meg. Zárójelben feltüntetjük az alkalmazásba vétel évét is.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. **Alsó tagozat**

1.1.1. *Ideiglenes tanterv*

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1422. (1977-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—dr. Varga Tamás: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1422/M. (1977-től.)

Halmos Istvánné—dr. Ill Mártonné—Kovács Zoltán—Tiszai Zoltánné: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 490/I., II. (1977-től.)

1.1.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve I., II. kötet 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1977. ISBN 963 7801 49 9. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 1. osztály. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 102/M. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Göndöcs László—Merő László —Merő Lászlóné—dr. Varga Tamás: Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 83 015. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 2. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 202/M. (1979-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Herczeg Jánosné—Merő László—dr. Varga Tamás (szerkesztette: Novák Lászlóné): Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 83 021. (1979-től.)

Kovács Zoltán: Matematika. Általános iskola 3. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 302. (1980-tól.)

Erdész Edéné—dr. Kovács Vendelné: Matematika-munkalapok. Általános iskola 3. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 302/M. (1980-tól.)

Dr. Hámori Miklós—Kovács Zoltán—Radnainé Szendrei Julianna—Szálka Györgyné—dr. Varga Tamás (szerkesztette: Cervenakné Neményi Eszter): Kézikönyv

a matematika 3. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 83 023. (1981-től.)

1.2. Felső tagozat

1.2.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBN 963 7023 43 7. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 5. osztálya számára. 7. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1522. (1974-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához. 7. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1522/M. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Feladatgyűjtemény és munkalapok. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1522/K. (1978-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 478. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 6. osztálya számára. 6. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1622. (1975-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanulásához. 6. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1622/M. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 480. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 7. osztálya számára. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1722. (1976-tól.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanulásához. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1722/M. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. R. sz.: 91 486. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára I. kötet. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1822/I. (1977-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára II. kötet. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1822/II. (1977-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanulásához. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 1822/M. (1977-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 487. (1977-től.)

1.2.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve III. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. ISBN 963 7801 68 5. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 5. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 502/1. (1978-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 5. osztály. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 502/M/1. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 83 001/1. (1978-tól.)

Dr. Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 83 004. (1979-től.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 6. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 602. (1979-től.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 6. osztály. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 602/M. (1979-től.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 83 020. (1980-tól.)

Dr. Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 7. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 83 032. (1981-től.)

Kovács Csongorné—Szeredi Éva—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 7. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 702. (1980-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Novák Lászlóné—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 7. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 702/M. (1980-tól.)

Imrecze Zoltánné—Kovács Csongorné—Szeredi Éva—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 8. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 802. (1981-től).

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Novák Lászlóné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 8. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 802/M. (1981-től.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. **Szakmunkásképző iskola**

A szakmunkásképző iskolák nevelési és oktatási terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 061. (1977-től.)

Koller Lászlóné: Módszertani útmutató matematikából a szakmunkásképző iskolák számára. Pedagógus továbbképzés könyvtára. 1. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977. (1977-től.)

Bige Istvánné—Cser Andor—Szegedi Miklós: Matematika I., I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 502. (1977-től.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, I. osztály. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 12 502/M. (1977-től).

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz I. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 001/I. (1977-től.)

Bige Istvánné—Csánk István—Szabó Sándorné: Matematika II., II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602/M. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz II. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/II. (1978-tól.)

Bedő László—Bige Istvánné—Szabó Sándorné: Matematika III., II—III. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 702. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Matematika munkalapok, II—III. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 12 702/M. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz III. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/III. (1978-tól.)

2.2. Szakközépiskola

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—4—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—33. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—4—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—34. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 4—3—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—35. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—6—6 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—36. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika I., I—II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 021/I. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika II., III—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 021/II. (1980-tól.)

Czapáry Endre: Matematika I. osztály. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 102. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 102/F. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika II. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 202. (1979-től.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok II. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 202/F. (1979-től.)

Gádor Endréné: Matematika II. osztály (C variáns), 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 212. (1980-tól).

Bakó Zsuzsa: Matematika III. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 302. (1980-tól.)

Gádor Endréné: Matematika III. osztály (C variáns), 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 312. (1981-től.)

Bakó Zsuzsa: Matematika IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 14 402/1. (1981-től.)

2.3. Gimnázium

A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 064. (1979-től.)

Ábrázoló geometria. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4077.

Matematika, A változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4052.

Matematika, B változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4051.

Dr. Urbán János: A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 009. (1979-től).

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika I. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 102. (1979-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika-feladatlapok I. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 102/F. (1979-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Tanári kézikönyv. Matematika I—II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 84 084. (1981-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika II. osztály 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 202. (1980-tól.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika-feladatlapok II. osztály 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 202/F. (1980-tól.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika III. osztály 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 302. (1981-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika III. osztály (fakultatív *A* változat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 331/A. (1981-től.)

Hajnal Imre—Dr. Nemetz Tibor—Dr. Pintér Lajos: Matematika III. osztály (fakultatív *B* változat). 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 331/B. (1981-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv I. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 125/MT. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató az I. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 060. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv II. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 225/MT. (1980-tól.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató a II. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 84 070. (1980-tól.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv III. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 13 325/MT. (1981-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv III. A-fakultatív változat. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz: 13 331/A/MT. (1981-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató a III. osztályos matematika munkatankönyvekhez. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: 84 086. (1981-től.)

3. DOLGOZÓK ISKOLÁJA

3.1. **Dolgozók szakközépiskolája**

3.1.1. *Szakmunkások szakközépiskolája*

Szakmunkások szakközépiskolájának nevelési és oktatási terve. 1. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1981. ISBN 963 681 1350. (1981-től.)

Czapáry Endre: Matematika I. (Esti és levelező tagozat.) 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981. R. sz.: D 12 502. (1981-től.)

BALÁZS LÁSZLÓ
vezető szakfelügyelő
Eger

Általános iskolai matematika-tagozatos 5. osztályok Heves megyében (kísérlet)

Az utóbbi években lényegesen csökkent az általános iskolai matematika szakosított (tagozatos) tantervű osztályok száma. Ennek oka a szervezhetőséggel kapcsolatos bizonytalanság, amelyet az új tanterv bevezetésével egyidőben megjelent minisztériumi állásfoglalás okozott. A szakosított osztályok szervezése, működése továbbra is hasznos és szükséges. Ebben a formában eredményesebben fejleszthetők a matematika iránt különösen érdeklődő, tehetséges tanulók képességei, fokozhatók az ismeretek alkalmazásának szintjei, nagyobb lehetőség van az önálló ismeretszerzés kialakítására. Ebből adódóan a következő feladatok oldhatók meg eredményesebben ezekben az osztályokban:

— az általános tantervű osztályok tantervi feladatainak igényesebb teljesítése;

— a matematikai gondolkodás intenzívebb fejlesztése;

— a korszerű matematikai ismeretek kiszélesítése;

— felkészítés az önképzésre, az ismeretek egyéni feldolgozására, elsajátítására;

— hatékonyabb felkészítés a továbbtanulásra;

— a tehetséges tanulók felkutatása, fejlődésük irányítása, befolyásolása.

Ezek a feladatok indokolttá teszik, hogy olyan időben és szinten kezdjük meg a képességek fokozottabb fejlesztését, amikor a tanulókban az érdeklődés, az elsajátított ismeretanyag birtokában a matematikai gondolkodásmód kialakulóban van.

Engedélyt kértünk és kaptunk a Művelődési Minisztérium Közoktatási Főosztályától ahhoz, hogy Heves megyében néhány általános iskola egy-egy ötödik osztályában kísérleti jelleggel matematika-tagozatot szervezhessünk. A kísérlethez Balogh Viktória főiskolai docenssel (Ho Si Minh Tanárképző Főiskola, Eger) kiegészítő tanterv-tervezetet készítettünk.

Ezt a tervezetet a „végleges matematika" anyagára építettük. Ennek a törzsanyagához kapcsolódik a kiegészítő anyagként megjelölt rész, valamint azok az anyagrészek, amelyek a matematika kiszélesítését és elmélyítését szolgálják. A tanterv felépítését követi ez a tervezet is, vagyis annak koncentrikus jellegét megtartja. Nem célunk az ismeretek túlzott növelése, nem akarjuk a középiskolai matematika-tananyagot „lehozni" az általános iskolába, hanem szeretnénk inkább az érvényben levő tantervi anyagot szélesebb tapasztalati bázisra helyezni, a tananyag újabb és többoldalú megközelítésével a tanulók önálló gondolkodását, munkáját minél nagyobb mértékben fejleszteni.

A követelményrendszerben sem terveztünk lényeges változást, csak annyit, amennyit az újonnan bekerült tananyag indokol.

A tervezet tartalmaz viszont olyan anyagrészeket, amelyeknek ismerete lé-

nyegesen elősegíti a középiskolai matematikai anyag jó elsajátítását. Cél tehát az is, hogy a középiskolai matematikaanyag befogadására is jobban készítsük fel tanulóinkat. A követelményrendszer megjelöli a minimumszintet. Mivel a szakosított (tagozatos) osztályok tananyaga is, és óraszáma is bővül, a minimum szintet is emelnünk kell. Ezt az igényt nemcsak az óraszámnövekedés, hanem az osztályok összetétele is, és maga a tanterv is indokolja. Ügyelnünk kell azonban arra, hogy a minimumszint emelése összhangban legyen a tantervvel és a követelményrendszerrel, és igazodjon a tanulók életkori sajátosságaihoz.

Mivel várhatóan egy-egy tagozatos osztály az 5. osztályban több osztályból, sőt több iskolából szerveződik, feltétlenül szükség van az év eleji ismétlő óráknál felzárkóztatást, összeszoktatást végezni. Ez igen fontos mozzanata kell hogy legyen a tagozatos osztályok indításának. Ezért ennek tervezését nagyon pontosan kell elvégezni. Ezeknek a megnövekedett feladatoknak csak abban az esetben tudunk eleget tenni, ha már a tervezésnél ügyelünk a tantervi anyag és a követelményrendszer összhangjára. Ennek először az éves munka megtervezésénél (a tanmenet készítésénél) kell jelentkezni. A tanmeneteket tematikusan tervezzük. Ezt a korszerű követelmény igényli. Jó, ha a témakörök előtt a szaktárgyakra vonatkozó főbb nevelési területeket is rögzítjük. A tananyag felsorolás mellett a tanmenetnek tartalmaznia kell a tanítandó fogalmakat, a belső és külső koncentrációkat, a szemléltetést, (a munkalapok, feladatlapok, tanórai tervezését), valamint az évközi megjegyzéseket. Fontosnak tartjuk, hogy nevelőink a tantárgy egészének problémáit ismerjék, és magukénak tekintsék a tantervi koncepciókat. Ehhez elsősorban arra van szükség, hogy ne csak az órák anyagában és a témakörökben, hanem a tantárgy egészében (1—8. osztály, illetve középfokú iskolák tananyagában) gondolkodjanak. Ezt a tanterv koncentrikus jellege igényli és feltételezi.

Ha nevelőink teljes mértékben megismerik az általános- és a középiskolák tantervét és követelményrendszerét, egyetértenek a matematikatanítás céljával, feladatával, akkor tanulóink is fogékonyak lesznek a matematika iránt és megszeretik a tantárgyat. Megszűnik a matematika „buktató" jellege, a kedvelt tantárgyak közé kerülhet, és az elért eredmények is megfelelőek lesznek. Ezt a célt lenne hivatott szolgálni a szakosított tantervű (tagozatos) osztályok szervezése is.

Módszertani alapelvek

Természetesen a módszertani alapelveknek a „normál" tantervhez igazodónak kell maradni. A tagozatos terveknél az alapelveknek még fokozottabban kell érvényesülni azok eredményes megvalósításában.

1. *Módszertani szabadság és változatosság*

„A matematikát tanító pedagógusok — mint a többiek is — szabadon válogathatnak az általuk megismert és jónak tartott tanítási módszerek között, ... azokat szabadon alakíthatják és kombinálhatják, kialakítva belőlük saját tanítási módszereiket." Ez a pedagógiai szabadság nemcsak lehetőséget, hanem inkább nagyobb felelősséget ró pedagógusainkra.

Mit jelent e vonatkozásban a pedagógiai szabadság? Jelenti elsősorban azt, hogy tanítási módszereik kialakításában legyenek korszerűek. Ez feltételezi azt, hogy minden pedagógust egy bizonyos fokú kreativitás kell, hogy jellemezzen. A kreatív képességeknek a különböző módszerek helyes összeötvözésében kell elsősorban megnyilvánulniuk. Ez nem jelentheti azt, hogy a tanítási óra felépítését meghatározó tényezőket figyelmen kívül hagyhatjuk. Az órák felépítését most is a tartalom, a didaktikai feladatok, a módszer és a tanulók életkori

sajátosságai szabják meg. Ugyanakkor a legjobb eredmények olyan módszerektől várhatók, amelyek a leghatékonyabbak és a legkorszerűbbek.

Mi biztosítja a korszerűséget? Elsősorban a korszerű tananyag. Ezt az új tanterv életbeléptetése biztosítja. Másodsorban igen fontos, hogy ezt a korszerű tananyagot korszerű módszerekkel dolgozzuk fel. Ebben, vagyis a módszerek korszerűsítésében van a pedagógusoknak legtöbb lehetősége a tanítási módszerek között válogatni, szabadon kialakítani, saját egyéniségükhöz formálni a legnagyobb felelősségtudat birtokában.

2. *Differenciálás, egyéni bánásmód*

A módszertani alapelvek is külön kiemelik, hogy a tanterv céljait nem lehet megvalósítani a differenciálás, az egyéni bánásmód alkalmazása nélkül. A módszertani szabadság azokat a módokat is biztosítja, amelyeket a tanulókhoz igazítva alkalmazunk a továbblépés érdekében. Úgy gondolom, hogy a szakosított tanterv feldolgozása még inkább igényli a differenciált foglalkozások szervezését. Ez a korszerűség érdekében olyan szimultán óravezetési módszert is jelent, amely nemcsak a hatékony és tapintatos segítést, hanem a jó képességű tanulók igényeinek kielégítését is biztosítja, beleértve az önálló, alkotó tevékenységük fejlesztését is.

3. *Tanulás, feladatmegoldás*

A tagozatos osztályokban fokozottabban van szükség az önálló feladatmegoldó képesség fejlesztésére, az önálló tanulás biztosítására is.

Biztosítani kell az önálló véleményalkotást. Ezek terjedjenek ki egy-egy sejtés kimondásáig, véleményük megvédéséig. Ennek érdekében fejleszteni kell a tanulók vitakészségét, a helyes szaktárgyi nyelvezet kialakítását és használatát. Mindezeket szilárd szakmai ismeretek birtokában tehetik meg. Ehhez a tagozatos tantervi anyag megfelelő ismereteket biztosít.

4. *A tanulás eszközei*

A tagozatos tanterv a taneszközök bővítését is igényli. A meglevő tankönyv, munkalap, feladatkártyák mellett feltétlenül szükség van a tagozatos anyag feldolgozását segítő munkalapokra, feladatlapokra. Ezeknek tartalmazni kell a kibővített anyagrészekhez szükséges feladatokat, feladatsorokat.

A tagozatos tantervnek figyelembe kell venni a számológépek alkalmazását a matematika tanításában. Ügyelni kell a helyes arányok biztosítására a fejben való, az írásbeli és a számológépes számolás alkalmazásánál. A számológépek használatának szükségességét az új tanterv is felveti, és alkalmazását támogatja. Ha arra egy-egy iskolánál lehetőség van, támogatni kell a dia-magnó használatát. Ez ugyanis az önálló ismeretszerzést jól szolgálja. Ez már a korszerűség optimális szintjét is eléri és meghaladja.

5. *Ellenőrzés, értékelés, osztályozás*

Felvetődik az a kérdés, hogy a tagozatos osztályokban hogyan történjék az ellenőrzés, értékelés, osztályozás. Mivel a tagozatos tanterv jóval többet tartalmaz, mint az „új tanterv" és a tagozatos osztályok tanulói is nagyobb érdeklődést mutatnak a tananyag iránt, a minimumszint értelmezése is módosulhat. Feltételezhetően a tagozatos osztályokban a matematika iránt érdeklődő, jó képességű tanulók nyernek felvételt, ezért az optimumszint elérését is biztosítani lehet.

Az állandó és folyamatos visszajelzések biztosítása mellett a pedagógusnak tudnia kell, hogy a kibővített tantervet a tanulók milyen fokon sajátították el, a követelményeknek milyen fokon tettek eleget. Ennek érdekében időnként felméréseket kell végezni. Jó, ha a tanulók megszokják, hogy munkájukat saját maguk ellenőrizzék. Ezt a célt akkor érhetjük el, ha a nevelő olyan légkört teremt, amelyben a tanuló esetleges tévedése sem jelent elmarasztalást, vagyis a nevelő csak irányítja a tanulók munkáját,

hogy maguk tegyenek különbséget a helyes és rossz megoldás között.

A követelmény és az osztályozás helyes összhangját is meg kell teremteni. Nem lenne szerencsés, ha a tanuló a tagozatos anyag nem kellő ismerete miatt gyenge osztályzatot kapna. Az „új tanterv" követelményszintje kell hogy az osztályzatot döntően befolyásolja. A tagozatos tantervi anyag követelményszintjének különböző teljesítése csak orientálja a jegyek értékét. Furcsa lenne, ha egy tagozatos osztályban megbukna egy tanuló a tagozatos tanterv nem kellő teljesítése miatt.

Mindezeknek a feladatoknak kellő szinten való teljesítése megköveteli, hogy

— a tanulóknak jó legyen a munkafegyelme;

— legyen a tanuló igényes saját munkájával szemben;

— folyamatos, következetes munkavégzést kell biztosítani mind a tanulók, mind a tanárok részéről;

— szakkörök, KMBK szervezését az igényeknek megfelelően kell szervezni;

— jól felkészült tanárok irányítsák akár munkaközösségi, akár más szinten a matematika tanítását a tagozatos osztályokban.

A kísérleti tagozatos tanterv tanítására kijelölt iskolák: Ho Si Minh Tanárképző Főiskola 4. sz. Gyakorló Általános Iskolája, Eger.

7. sz. Általános Iskola, Eger

Körzeti Általános Iskola, Heves

Általános Iskola, Erdőtelek

DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

(Kísérleti anyag, II. osztály 2. rész.)

A Matematika Tanítása 1981. évi 4. számában közöltük a II. osztályos részletezett követelményrendszert.

Ezt is, akárcsak az első éves követelményrendszert, két éven keresztül mértük 10, illetve 7 osztályban.

A mérésre szolgáló feladatlapokat változtatás nélkül közöljük, az elért eredmények statisztikai adataival együtt. Még azokat a feladatokat sem változtattuk meg, amelyek túl nehéznek vagy túl könnyűnek bizonyultak. Ugyanis úgy érezzük, hogy a statisztikai adatokkal együtt ezek még így is több információt nyújtanak, mint az esetleg helyükbe tett, ki nem próbált, megfelelőbbnek vélt feladatok.

II. osztály 1. téma

A csoport

1. Ábrázoljuk a számegyenesen a következő relációkat:

$$a)\ 3 < x;\quad b)\ k \leqq -5\quad c)\ -3 \leqq d < 2.$$

2. Ábrázoljuk a síkban azokat a pontokat, amelyekre igaz, hogy
a) egy adott ponttól legfeljebb 1 cm-re vannak,
b) egy adott egyenestől 1,5 cm-re vannak!

3. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget:

$$4x - 1 \geqq x + 5.$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x}{3}+x+2=2(x-1).$$

5. Három egymás után következő munkaművelet 120 percig tart (ha közte nem tartunk szünetet). Az első művelet kétszer annyi időt vesz igénybe, mint a második, a harmadik pedig 20 perccel többet, mint a második. Mennyi ideig tartanak az egyes munkaműveletek?

6. Egyszerre indul el 57 km távolságból, ugyanazon az útvonalon egymással szembe egy gyalogos és egy kerékpáros. A gyalogos 4, a kerékpáros 15 km-t tesz meg óránként. Hány óra múlva találkoznak?

B csoport

1. Ábrázoljuk a számegyenesen a következő relációkat:

$$a)\ x<2;\quad b)\ -2\leqq d;\quad c)\ -1<k\leqq 3.$$

2. Ábrázoljuk a síkban azokat a pontokat, amelyekre igaz, hogy
   a) egy adott ponttól 1,5 cm-re vannak,
   b) egy adott egyenestől legfeljebb 1 cm-re vannak!

3. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget:

$$3x-2\leqq 2x+1.$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x}{2}+3(x-1)=2x+3.$$

5. Egy golyóstoll, egy radír és egy ceruza összesen 16 Ft-ba került. A toll négyszer annyiba került, mint a ceruza, a radír pedig 1 Ft-tal volt drágább a ceruzánál. Mennyibe kerültek külön-külön?

6. Az egyik faluból elindul egy gyalogos és 4 km-t tesz meg óránként. Másfél óra múlva utánaindul ugyanazon az útvonalon egy kerékpáros, aki 16 km-t tesz meg óránként. Mikor éri utól a kerékpáros a gyalogost?

A mérést itt is és a következőkben is a témakör összefoglalása után végeztük.

Mérési eredmények:

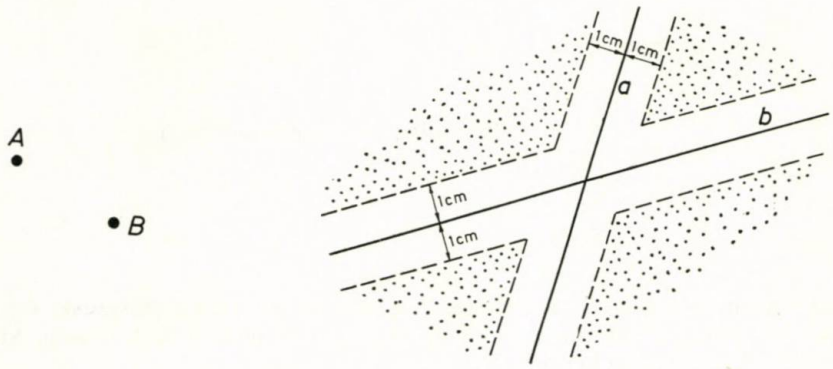
Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Összesen
Az egyes feladatokra elérhető pontszámok	7	7	6	5	8	10	43
Teljesítmény %-ban	64,6	67,9	48,2	44,7	61,1	44,5	50,1

100%-nak vettük (itt is és a következőkben is) azt a pontszámot, amely úgy adódott volna, ha a 10, illetve 7 (összesen 17) osztály minden egyes tanulója az egyes feladatokra maximális pontszámot kapott volna.

II. osztály 2. téma

A csoport

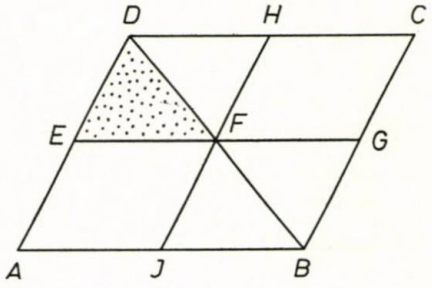
1. *a)* Rajzoljunk olyan pontokat, amelyek az *A* és *B* ponttól egyenlő távol vannak!



b) Hogyan jellemezhetnénk a bepontozott síkrészekbe eső pontok halmazát?

2. Írjuk le, hogy az ábrán látható háromszögek közül melyek hasonlóak, és ezen belül melyek egybevágóak is! (A háromszögeket a csúcspontjaikkal adjuk meg. Például a megjelölt háromszöget így: *EFD* △.)

(hasonló: ∼, egybevágó: ≅)

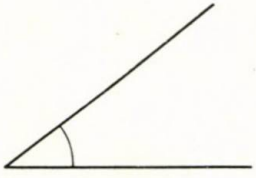


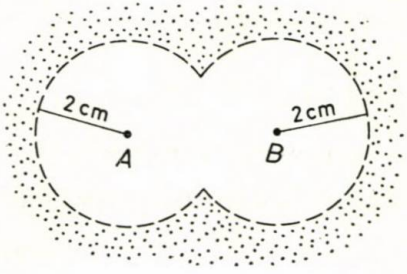
3. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 11 cm hosszú, kerülete 28,5 cm. Egy hozzá hasonló háromszög kerülete 114 cm. Mekkorák az utóbbi háromszög oldalai?

4. Egy háromszög egyik oldala 6 cm, a rajta fekvő két szög 120°-os és 30°-os. Szerkesszük meg a háromszög magasságpontját!

B csoport

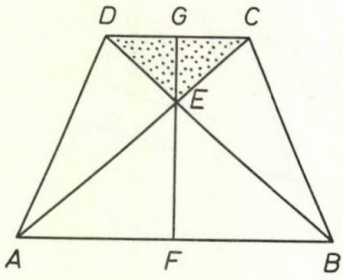
1. *a)* Rajzoljunk olyan pontokat az adott szög belsejében, amelyek a szög száraitól egyenlő távolságra vannak!





b) Hogyan jellemezhetnénk a bepontozott síkrészbe eső pontok halmazát?

2. Írjuk le, hogy az ábrán látható háromszögek közül melyek hasonlóak, és ezen belül még melyek egybevágóak is! (A háromszögeket a csúcspontjaikkal adjuk meg. Például a megjelölt háromszöget így: $ECD\triangle$.)



(hasonló: $\sim$, egybevágó: $\cong$)

3. Egy háromszög oldalai $a=1{,}5$ cm, $b=3$ cm és $c=2{,}2$ cm hosszúak. Egy hozzá hasonló háromszögben az a oldalnak megfelelő a' oldal 7,5 cm hosszú. Mekkora ez utóbbi háromszög kerülete?

4. Egy háromszög két oldala 6 cm és 7 cm hosszú, a két oldal által közbezárt szög 120°-os. Szerkesszük meg a háromszög súlypontját!

Mérési eredmények:

Feladatok	1.	2.	3.	4.	Összesen
Az egyes feladatokra elérhető pontszámok	4	6	6	7	23
Teljesítmény %-ban	47,5	72,5	54,5	55,9	59,7

II. osztály 3. téma

A csoport

1. Írjuk fel a 24 összes osztóját!
2. Írjunk fel a 8 többszörösei közül kb. 5 számot!
3. Írjuk fel a 28 és 21 összes közös osztóját!
4. Bontsuk törzstényezőire a 102-őt!
5. Fejezzük ki a következő szorzatokat hatvány alakban!

a) $5\cdot5\cdot5=$

b) $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6=$

c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=$

d) $x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y=$

6. Számítsuk ki a következő szorzatot!

$$(5^2-4)\cdot(2^5-3^3)=$$

7. Írjuk fel közös kitevővel az egyenlő alapú hatványokat!

a) $4^2 \cdot 4^3 =$

b) $\frac{3^6}{3^3} =$

c) $5m^3 \cdot p^2 \cdot 2 \cdot m \cdot p^3 =$

d) $\frac{15a^5b}{5a^3b} =$

8. Írjuk fel közös kitevő segítségével a következő hatványokat és számítsuk ki az értéküket!

a) $3^3 \cdot 2^3 =$

b) $\frac{20^6}{2^6} =$

9. Végezzük el tényezőnként a hatványozást!

a) $(a^5bc^2)^2 =$

b) $\left(\frac{m^4}{k^3}\right)^3 =$

10. Melyik szám nagyobb: 20^3, vagy 10^6?
11. Végezzük el a következő szorzást, és vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$(2a+3b) \cdot (3a-b) =$$

12. Végezzük el a következő négyzetre emelést:

$$(2x+y)^2 =$$

13. Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{17^2-3^2}{20} =$$

14. Emeljük ki a következő tagokból az azonos tényezőket:

$$3a^2b+9a^3b^2-6a^3b =$$

B csoport

1. Írjuk fel a 36 összes osztóját!
2. Írjunk fel a 6 többszörösei közül ötöt!
3. Írjuk fel a 35 és a 20 összes közös osztóját!
4. Bontsuk törzstényezőkre a 96-ot!
5. Fejezzük ki a következő szorzatokat hatvány *alakban:*

a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$

b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} =$

d) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b =$

6. Számítsuk ki a következő szorzatot:

$$(2^3 - 5) \cdot (3^4 - 5^2) =$$

7. Írjuk fel közös kitevővel az egyenlő alapú hatványokat:

a) $3^2 \cdot 3^4 =$

b) $\frac{2^5}{2^2} =$

c) $2a^2 \cdot b \cdot 5a^2b^2 =$

d) $\frac{12k^3l}{3k^2l} =$

Mérési eredmények:

Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Az egyes feladatokra elérhető pontszámok	6	5	4	5	4	4	8	4
Teljesítmény %-ban	65,8	88,6	78,5	64,7	87,2	55,2	55,5	43,4

Feladatok	9.	10.	11.	12.	13.	14.	Összesen
Az egyes feladatokra elérhető pontszámok	6	10	8	8	10	6	88
Teljesítmény %-ban	50	39,7	41,2	50,1	36,2	39,1	54,4

RÁCZ JÁNOS
vezető tanár
Budapest

Néhány feladat és megoldása ürügyén

(Megjegyzések az értékkészlet tanításáról) (1. rész)

1. Az 1979. évi második napi érettségi-felvételi közös írásbeli vizsga feladatsorának 6. feladata így szólt:

„Az x és y olyan valós számokat jelölnek, amelyekre az

$$x^2 - 1, y, \frac{16}{x^2 - 1}$$

számok egy mértani sorozat; a

$$\log_{x+3} y, \log_{x+3}(x^4 - 5x^2 + 20), \log_{x+3} y^3$$

számok pedig egy számtani sorozat egymást követő elemei. Számítsa ki az összes ilyen mértani sorozat hányadosát és számtani sorozat különbségét!"

A javítási útmutatóban közölt megoldás így kezdődik:

„Mivel az első három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme, ezért

$$y^2 = (x^2-1)\cdot\frac{16}{x^2-1} = 16,$$

ebből $y=\pm 4$.

Az y azonban *nem lehet negatív,* mert a feltételek szerint van logaritmusa, ezért $y=4$ (kiemelés tőlem: R. J.). Minthogy a második számhármas egy számtani sorozat egymást követő elemeiből áll, ezért

$$2\cdot\log_{x+3}(x^4-5x^2+20) = \log_{x+3} y+\log_{x+3} y^3,$$

ebből

$$(x^4-5x^2+20)^2 = y^4 = 256,$$

azaz vagy

(1) $$x^4-5x^2+20 = 16,$$

vagy

(2) $$x^4-5x^2+20 = -16."$$

Később így folytatódik:

„A (2) egyenletnek nincs valós gyöke, mert x^2-et tekintve ismeretlennek, a diszkriminánsa negatív."

Vegyük észre, hogy az itt alkalmazott $2\log_a z=\log_a z^2$ azonosság csak pozitív z-kre igaz, hiszen a bal oldalnak csak ekkor van értelme. Ebben a feladatban tehát a (2) egyenlet eleve nem jöhet szóba és nem azért, mert a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke. Nem volt indokolt az értelmezési tartományt bővítő azonosság akalmazása, hiszen előbb már kiderült, hogy y pozitív. Így helyesen csak az

$$\log_{x+3}(x^4-5x^2+20) = 2\cdot\log_{x+3} y = \log_{x+3} y^2$$

egyenletből (1) adódik.

Kövessük a megoldó gondolatmenetét! Ha a (2) egyenletnek volna valós gyöke, akkor ebben a feladatban azzal is kellene foglalkozni? Nyilván nem, hiszen $y^4=(y^2)^2$, $y^4=256$, tehát $y^2=16$. A bal oldaltól függetlenül $y^2=-16$ a valós számok körében nem állhat fenn!

2. Az 1980. évi külföldi ösztöndíjra pályázók feladatsorának egyik feladata így szólt:

„A p valós paraméter milyen értékeire van valós megoldása a következő egyenletnek:

$$\sqrt{x-4p+16} = 2\sqrt{x-2p+4}-\sqrt{x}.$$

Oldja is meg az egyenletet!"

A javítási útmutatóban található megoldásban ebben az alakban emelték négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Így a

$$\sqrt{x^2-2px+4x} = x-p$$

egyenlethez jutottak. Ezt újra négyzetre emelve és megoldva az $x=\frac{p^2}{4}$ gyök adódik.

A kapott gyököt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve ezt kapjuk:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-4\right)^2}=2\sqrt{\left(\frac{p}{2}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

A megoldásban a továbbiakban ennek a fennállását vizsgálták négy intervallumban:

$$p \leqq 0, \quad 0 < p < 4, \quad 4 \leqq p < 8, \quad 8 \leqq p.$$

Végül azt kapták, hogy az első és utolsó intervallumba tartozó p értékekre van megoldása az egyenletnek.

Az egyenlet jobb oldala két gyökös kifejezés különbsége, a bal oldalon egy gyökös kifejezés áll. Érdemes átrendezni az egyenletet a következő módon:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4p+16}=2\sqrt{x-2p+4}. \tag{3}$$

Itt is három gyökös kifejezés van, de a bal oldalon két gyökös kifejezés összege áll. Ha most ezt az egyenletet emeljük négyzetre, akkor hamis gyök nem léphet fel, mert a bal oldal biztosan pozitív, a jobb oldal pedig szintén nem lehet negatív. Így ennek a másik egyenletnek, amelynek ugyanez a négyzete, mint a mi egyenletünknek, azaz a

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4p+16}=-2\sqrt{x-2p+4}$$

egyenletnek biztosan nincs gyöke.

Az útmutatóban közölt megoldásban az első négyzetre emelés után kapott egyenlet nemcsak a feladatban szereplő egyenletnek, hanem a

$$\sqrt{x-4p+16}=\sqrt{x}-2\sqrt{x-2p+4}$$

egyenletnek is négyzete. Így ez tartalmazhat hamis gyököt. Az általam javasolt út az első lépésben biztosan nem tartalmaz hamis gyököt.

A (3) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd a kapott egyenletet rendezve a következőhöz jutunk:

$$\sqrt{x^2-4px+16}=x-2p. \tag{4}$$

Az útmutatóban a négyzetre emelés után kapott egyenlet jobb oldalán $x-p$ áll, ez nem lehet negatív, ezt célszerű lett volna kikötni a második négyzetre emelés előtt. Ekkor a $0<p<4$ intervallumot már nem kellett volna vizsgálni. A (4) egyenlet jobb oldalán álló szám nem lehet negatív, mert a bal oldalon álló négyzetgyökös kifejezés értéke nem negatív: $x-2p\geqq 0$. A (4) egyenletet négyzetre emelve és rendezve $x=\frac{p^2}{4}$ adódik. A négyzetre emelés után kapott egyenlethez jutunk még a

$$\sqrt{x^2-4px+16}=2p-x$$

egyenlet négyzetre emelésével is, de itt a $2p-x\geqq 0$ feltételnek kell teljesülni. Mindebből következik, hogy $x=\frac{p^2}{4}$ gyöke az eredeti egyenletnek minden olyan p-re, amelyre

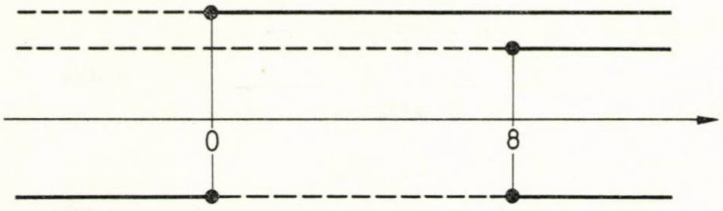
$$\frac{p^2}{4}-2p \geqq 0,$$

azaz

$$p^2-8p=p(p-8) \geqq 0$$

teljesül.

Az ábrán látható az egyenlőtlenség megoldása (teljes vonal jelzi a pozitív, szaggatott a negatív intervallumot, pont jelzi, hogy ott a tényező nulla. A harmadik, számegyenessel párhuzamos vonal a szorzatról ad számot) (1. ábra).



1. ábra

Így $p \leqq 0$ vagy $p \geqq 8$. Mint látjuk, a négy intervallumra vonatkozó részletes elemzés nélkül, végig ekvivalens átalakítással adódik a helyes megoldás.

3. Az 1980. évi, második napi egységes érettségi-felvételi feladatsor 8. feladata a következő volt:

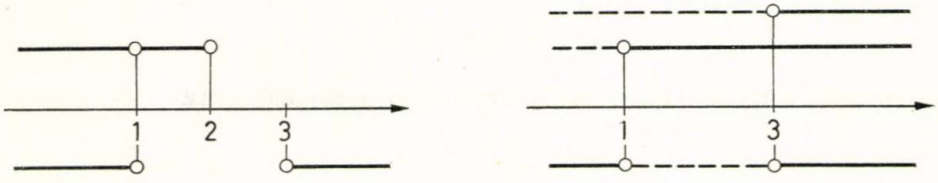
„Állapítsa meg, mely x-ekre pozitív a következő kifejezés:

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{2-x}(x^2-4x+3)}\text{''}$$

Az útmutatóban közölt megoldás két esetet különböztet meg. Ez elvileg természetesen helyes. (Ha a logaritmus alapja $4-x$ volna, akkor valóban szükség volna a két esetre!)

Az ilyen típusú feladatokban az értelmezési tartomány megállapítása három feltétel egyidejű tejesülését követeli meg: az alap legyen pozitív; az alap ne legyen 1; a kifejezés, aminek logaritmusát vesszük, pozitív legyen. Itt tehát

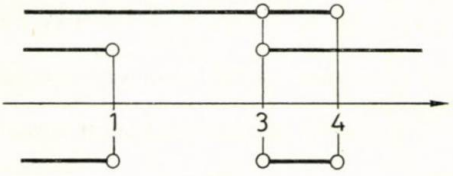
$$x < 2 \wedge x \neq 1 \wedge x^2-4x+3 = (x-3)\cdot(x-1) > 0 \text{ (2. ábra).}$$



2. ábra

A 2. ábra alapján a kifejezés értelmezési tartománya: $x<1$, így ebben a konkrét feladatban nincs két eset.

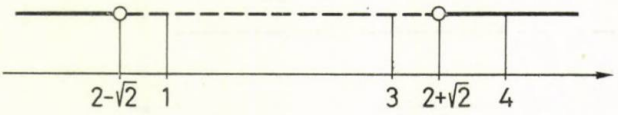
Vegyük most a $2-x$ helyett a $4-x$ alapot, egyébként a feladat legyen ugyanez. Ekkor az értelmezési tartományból adódó feltétel:



3. ábra

$$x < 4 \wedge x \neq 3 \wedge (x-3)\cdot(x-1) > 0.$$

Az értelmezési tartomány: $x<1 \vee 3<x<4$. Az $x<1$ esetben a kifejezés akkor pozitív, ha $x^2-4x+3>1$, a $3<x<4$ esetben pedig akkor, ha $x^2-4x+3<1$. A 4. ábráról az $x^2-4x+2=(x-2+\sqrt{2}).\ (x-2-\sqrt{2})$ szorzat előjelét olvashatjuk le:



4. ábra

A megoldás tehát: $x<2-\sqrt{2} \vee 3<x<2+\sqrt{2}$.

4. A gimnáziumi II. osztályos Matematika tankönyv (R. sz. 13 202) nagyon helyesen állapítja meg, hogy az $A^2=B^2$ nemcsak az $A=B$, hanem az $A=-B$ egyenlet két oldalának négyzetre emeléséből is következik. Ezért egy egyenlet négyzetreemelésekor hamis gyök is felléphet. A külföldi ösztöndíjasok feladata kapcsán láttuk, hogy az útmutatóban közölt megoldásban a hamis gyök valóban fel is lépett (utólag kellett kizárni), míg az általam javasolt megoldás nem tartalmazhatott hamis gyököt. Következtetését a szerző a következő egyenlet megoldására alapozza:

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+2} = 2.$$

Ez az egyenlet nem alkalmas az előbbi következtetés levonására. A szerző először megadja a valós számoknak azt a legbővebb halmazát, amelyre a két gyökös kifejezésnek egyszerre értelme van. Megfeledkezik azonban arról, hogy minden négyzetgyökös kifejezéssel kapcsolatban két dolgot kell vizsgálni, a gyök alatti kifejezést — ezt megteszi — és magát a gyökös kifejezést — ezt elmulasztja. Mivel a két gyökös kifejezés összege 2, mindegyik nem nagyobb 2-nél, így

$$\sqrt{3x+4} \leqq 2 \wedge \sqrt{x+2} \leqq 2,$$

tehát $x \leqq 0 \wedge x \leqq 2$. Így a valós számoknak az a részhalmaza, amelyen belül a megoldás szóba jöhet

$$-\frac{4}{3} \leqq x \leqq 0.$$

A szerző

$$\sqrt{3x+4} = 2-\sqrt{x+2}$$

alakra rendez és így emel négyzetre. A négyzetre emelt egyenlet még a

$$\sqrt{3x+4} = \sqrt{x+2}-2$$

egyenletnek is négyzete. A megadott értelmezési tartományban ennek az utóbbi egyenletnek a jobb oldala végig negatív, ezért a megadott intervallumban biztosan nincs gyöke. Az $x>0$ intervallumban sem lehet gyöke, mert itt

$$\sqrt{3x+4} > \sqrt{x+2}.$$

Így a négyzetre emelés után kapott egyenlet gyökei csak az eredeti egyenlet gyökei lehetnek.

A négyzetre emelés után kapott egyenletet a szerző rendezi:

$$2\sqrt{x+2} = 1-x. \tag{5}$$

Ezután újabb négyzetre emelés következik. Az így kapott egyenlet nem csak (5)-ből, hanem a

$$2\sqrt{x+2} = x-1 \tag{6}$$

egyenletből is következik négyzetre emeléssel. Mivel a gyökös kifejezés nemnegatív, az utóbbi egyenlet, (6) gyökeire az $x \geqq 1$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni. (Az eredeti, (5) egyenletre az általam adott megoldásban ezért nem kell kikötni, hogy $x \leqq 1$, mert értelmezési tartományunk még ennél is szűkebb.) A négyzetre emelés után kapott egyenlet két gyöke -1 és 7. Az elmondottakból világos, hogy az eredeti egyenlet egyetlen gyöke -1 (a 7 a (6) egyenlet gyöke).

5. A könyvhöz készült feladatlapokon az egyenletek ekvivalenciájának vizsgálatára példaként szerepel a következő feladat:

„Oldd meg a

$$\sqrt{5x+4}+\sqrt{3x+1} = \sqrt{8x+17} \quad \text{és}$$

$$\sqrt{5x+4}-\sqrt{3x+1} = \sqrt{8x+17}$$

egyenleteket, és hasonlítsd össze a megoldás lépéseit."

Úgy érzem, a szerző itt sem gondolt az értékkészletre, hiszen a teljes értelmezési tartományon belül

$$\sqrt{5x+4} < \sqrt{8x+17},$$

ezért a második egyenletnek nem lehet gyöke, mert a kisebbik kifejezésből vonunk le egy nemnegatív kifejezést. Így itt aligha van értelme összehasonlítani a megoldás lépéseit.

Szerencsésebb lett volna a már előbb tárgyalt feladatot kitűzni így: oldd meg a

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+2} = 2 \quad \text{és} \tag{7}$$

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+2} = 2 \tag{8}$$

egyenleteket és hasonlítsd össze a megoldás lépéseit.

A (7) egyenlet megoldását részletesen tárgyaltam. A (8) egyenletben vegyük észre, hogy $\sqrt{3x+4} \geqq 2$ miatt az értelmezési tartomány $x \geqq 0$. Rendezzük mindkét egyenletet:

$$\sqrt{3x+4} = 2-\sqrt{x+2} \quad \text{és} \tag{9}$$

$$\sqrt{3x+4} = 2+\sqrt{x+2}. \tag{10}$$

A (9) négyzetre emelése után kapott egyenletről már láttuk, hogy csak az eredeti egyenlet gyökei elégíthetik ki (a „másik" szóba jövő egyenletnek nincs gyöke). A (10)-ből négyzetre emeléssel kapott egyenlethez eljuthatunk még a

$$-\sqrt{3x+4} = 2+\sqrt{x+2} \tag{11}$$

egyenletből is, négyzetre emeléssel. Mivel (11) bal oldala nem pozitív, jobb oldala pozitív, az egyenletnek nincs gyöke.

A négyzetre emelés és rendezés után (9)-ből ezt kapjuk:

$$2\sqrt{x+2} = 1-x, \tag{12}$$

(10)-ből ezt:

(13) $$2\sqrt{x+2} = x-1.$$

A (12) egyenlet gyöke -1, a (13) egyenlet gyöke 7.

Észre lehet venni, hogy a második négyzetre emelés felesleges, mert a (12) és (13) egyenlet is átalakítható $\sqrt{x+2}$-re nézve másodfokú egyenletté. A (12) átalakítása:

(14) $$(x+2)+2\sqrt{x+2}-3 = 0,$$

a (13)-ból ehhez jutunk:

(15) $$(x+2)-2\sqrt{x+2}-3 = 0.$$

A két egyenlet gyökei egymás ellentettjei, (14) gyökei 1; -3, (15) gyökei pedig -1; 3. Mivel gyökös kifejezés nem lehet negatív, (14)-ből $\sqrt{x+2}=1$, tehát $x=-1$, (15)-ből $\sqrt{x+2}=3$, tehát $x=7$.

6. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+8}+\sqrt{x-18} = 23-x.$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értelmezési tartománya: $x \geqq 18$. Nézzük az értékkészleteket is. A bal oldalon álló két nemnegatív szám összege legalább $\sqrt{26}$, míg a jobb oldal $x \geqq 18$ miatt legfeljebb $23-18=5$ lehet. A két oldal értékkészletének nincs közös eleme, tehát az egyenletnek nincs gyöke.

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+13}-\sqrt{x-14} = x-8.$$

A bal oldal értelmezési tartománya: $x \geqq 14$. Vizsgáljuk most is az értékkészletet. Szorozzuk meg mindkét oldalt az értelmezési tartományban pozitív

$$\sqrt{x+13}+\sqrt{x-14}$$

kifejezéssel, ekkor a következőt kapjuk:

$$27 = (x-8)\cdot(\sqrt{x+13}+\sqrt{x-14}).$$

Mivel a jobb oldalon álló kifejezéssel definiálható függvény az $x \geqq 14$ intervallumban szigorúan monoton nő, ezért a jobb oldal értéke legalább $6\sqrt{27}>27$, így az egyenletnek nincs gyöke.

8. A q paraméter mely valós értékére van megoldása a következő egyenletrendszernek:

(16) $$\left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^{\sin^2\pi\cdot\frac{x-1}{4}} = \sqrt{y-7}-\sqrt{8-y},$$

(17) $$5\sqrt{x+20}-\sqrt{-(25x+411)} = y+q?$$

A talált q értékekre oldjuk is meg az egyenletrendszert!

A szereplő kifejezések értelmezési tartományai:

$$7 \leqq y \leqq 8 \quad \text{és} \quad -20 \leqq x \leqq -\frac{411}{25}.$$

Ebből annyi látszik, hogy lehet megoldás. Az értékkészlet vizsgálata nélkül itt tovább nem jutunk. Világos, hogy

$$1 \leqq \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^{\sin^2 \pi \cdot \frac{x-1}{4}} \leqq \frac{\sqrt{29}}{5} \quad \text{és}$$

$$-1 \leqq \sqrt{y-7} - \sqrt{8-y} \leqq 1.$$

Így a (16) egyenletben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal értéke 1. Ebből $y=8$ és

$$\sin^2 \pi \cdot \frac{x-1}{4} = 0$$

adódik. Így $\pi \frac{x-1}{4} = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, tehát $x = 4k+1$, $k \in \mathbf{Z}$. Figyelembe véve az értelmezési tartományt

$$-\frac{21}{4} \leqq k \leqq -\frac{109}{25}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

amiből $k=-5$, tehát $x=-19$. A (17) egyenletből ekkor $q=-11$ adódik. Az eredeti egyenletrendszernek tehát csak $q=-11$ esetén van megoldása és ekkor

$$x = -19; \quad y = 8.$$

FELADATOK

Rovatvezető: POGÁTS FERENC

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (lehet ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

987. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre egy 10-nél nem kisebb egész szám négyzete végződhet?

988. Legyen a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok egy permutációja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és c pozitív valós szám. Igazoljuk, hogy

$$n \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c^{a_i - b_i}!$$

Bencze Mihály, Brassó

989. H a sík $2n$ olyan pontból álló halmaza, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be: bárhogyan is színezünk H-beli n pontot pirosra, a többit kékre, van n olyan szakasz, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja és végpontjai H-nak különböző színű pontjai!

990. Bizonyítsuk be: az α, β szögű háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú,

ha

$$2 \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{4}} = 1.$$

Bodnár János, Budapest

991. Az (a_n) valós számsorozatot súlyozott számtani sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan φ és ψ pozitív valós szám, hogy $\varphi+\psi=1$, és minden $n\geqq 2$-re

$$a_n = \varphi a_{n-1} + \psi a_{n+1}.$$

Igazoljuk, hogy (a_n) pontosan akkor súlyozott számtani sorozat, ha található olyan (g_n) monoton mértani sorozat és a_0 valós szám, hogy minden n-re

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} g_k!$$

Matolcsy Kálmán, Debrecen

992. Jelölje $f(n)$ az n pozitív egész tízes számrendszerbeli alakjában előforduló 0 számjegyek számát. Az $a>0$ mely értékeire konvergens

$$\sum_{n\geqq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \; ?$$

Feladatmegoldások (963—968.)

963. Bizonyítsuk be, hogy bármely a és n természetes számra a^2-a+1 osztója az $(a-1)^{n+2}+a^{2n+1}$-nek!

I. Megoldás: A binomiális tételt felhasználva

$$(a-1)^{n+2}+a^{2n+1} = [a^2-(a^2-a+1)]^{n+2}+a^{2n+1} =$$

$$= a^{2n+4}+\left[\sum_{k=1}^{n+2}(-1)^k\binom{n+2}{k}(a^2)^{n+2-k}(a^2-a+1)^k\right]+a^{2n+1} =$$

$$= a^{2n+1}(a^3+1)+(a^2-a+1)A = (a^2-a+1)\left(A+a^{2n+1}(a+1)\right) = (a^2-a+1)B,$$

ahol A és így B is egész szám. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

II. Megoldás: Azt igazoljuk, hogy az a^2-a+1 polinomfüggvény komplex zérushelyei egyben az $(a-1)^{n+2}+a^{2n+1}$ polinomfüggvény komplex zérushelyei is, mert ebből következik a feladat állítása. Mivel az $a^2-a+1=0$-ból $a^2=a-1$, így

$$(a-1)^{n+2}+a^{2n+1} = (a^2)^{n+2}+a^{2n+1} = a^{2n+1}(a^3+1) = (a+1)(a^2-a+1)a^{2n+1},$$

és ezt kellett igazolni.

Bencze Mihály, Brassó

Megjegyzés: A feladat általánosítható: A

$$\sum_{i=0}^{2k}(-a)^i \quad \text{osztója az} \quad a^{2(n+1)k-1}+\left(\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1}a^i\right)^{n+2}\text{-nek},$$

minden a, k, n természetes számra.

Az előbbi megoldás mintájára, a $\sum_{i=0}^{2k}(-a)^i=0$-ból

$$a^{2k}=\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1}a^i, \quad \text{és ezzel}$$

$$a^{2(n+1)k-1}+\left(\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^{i+1}a^i\right)^{n+2}=a^{2k(n+1)-1}+(a^{2k})^{n+2}=$$

$$=(a^{2k+1}+1)a^{2k(n+1)-1}=(a+1)a^{2k(n+1)-1}\sum_{i=0}^{2k}(-a)^i.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 29.

964. Legyen $f: \mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ és minden $x, y\in\mathbf{N}$-re

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1.$$

Adjuk meg az $x\mapsto f(x)$ leképezést, ha $f(1)=1$.

Kőváry Károly, Budapest

Megoldás: A feltétel alapján

$$f(1)+f(1)=2=f(2)-1-1, \quad \text{azaz} \quad f(2)=4.$$

$$f(1)+f(2)=5=f(3)-2-1, \quad \text{azaz} \quad f(3)=8.$$

$$f(1)+f(3)=9=f(4)-3-1, \quad \text{azaz} \quad f(4)=13.$$

Ebből azt sejtjük, hogy

$$f(x)=\frac{x(x+3)}{2}-1.$$

Sejtésünket teljes indukcióval igazolhatjuk.

Mivel egyrészt, $\qquad f(x)+f(1)=f(x+1)-x-1,$

másrészt az indukciós feltevés miatt

$$f(x)+f(1)=\frac{x(x+3)}{2}-1+1,$$

így

$$f(x+1)=\frac{x(x+3)}{2}+x+1=\frac{(x+1)(x+4)}{2}-1,$$

és ezt kellett igazoljuk. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így nyert kifejezés eleget tesz a feladatbeli feltételeknek.

A leképezés tehát, $f: \mathbf{N}\to\mathbf{Z}$; $x\mapsto\frac{x(x+3)}{2}-1$.

Major Piroska, Budapest

I. megjegyzés: A feladat egy általánosítása a következő:
Legyen $f: \mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ és minden $x, y\in\mathbf{N}$-re

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-A\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}+B,$$

ahol $A, B\in\mathbf{Z}$ és $f(1)=1$.
Határozzuk meg az $x\mapsto f(x)$ leképezést!
Mivel

$$f(1)+f(m)=f(m+1)-A\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}1^{n-1-k}m^k+B,$$

ezért az $m=1, 2, \ldots, s$ értékekre előbbi egyenlőségeinket összegezve, rendezés után

$$(s+1)f(1)=f(s+1)-A\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(1^k+2^k+\ldots+s^k)+sB. \qquad (*)$$

Az $(s+1)^n-(s+1)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(1^k+2^k+\ldots+s^k)$ miatt a (*)-ból $x=s+1$ helyettesítéssel

$$f(x) = Ax^n+(1-A-B)x+B$$

adódik. Ha $n=2$, $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, úgy eredeti feladatunkat nyerjük.

Bencze Mihály, Brassó

II. megjegyzés: A feladat más irányú általánosítását kapjuk, ha az eredeti feltételeket némileg módosítjuk:

Legyen $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és minden $x, y\in\mathbf{R}$-re

$$f(x)+f(y) = f(x+y)-xy-1.$$

Ha $f(1)=1$ és $f(-1)=-2$ továbbá f folytonos, akkor $x\mapsto\frac{x(x+3)}{2}-1$.

Legyen q pozitív egész. Ekkor

$$f(qx) = qf(x)+\frac{q(q-1)}{2}x^2+q-1. \tag{1}$$

Ezt az előbbi megjegyzésben látottak mintájára, az $y=0, x, 2x, \ldots, (q-1)x$ helyettesítéssel, majd a kapott egyenletek összegezésével nyerjük. Ha most (1)-ben $x=\frac{1}{q}$, akkor

$$f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}+3\right)\right]-1.$$

Ha most az előzőekhez hasonlóan az $x=\frac{1}{q}$ $y=0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{p-1}{q}$ helyettesítéssel adódó p darab egyenlőséget összeadjuk, akkor

$$pf\left(\frac{1}{q}\right)-1=f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p(p-1)}{q^2}-p.$$

Ebben az $f\left(\frac{1}{q}\right)$ értéket behelyettesítve

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}+3\right)\right]-1$$

adódik.

Az $f(-1)=-2$ feltétel miatt az (1) formulához vezető úthoz hasonlóan kapjuk:

$$f(-x) = \frac{1}{2}[(-x)(-x+3)]-1.$$

Ezzel minden racionális x-re igazoltuk állításunkat. Mivel f folytonos, ezért ha $x_n\in\mathbf{Q}$ és $x_0\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, továbbá $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n(x_n+3)}{2}-1\right)=\frac{x_0(x_0+3)}{2}-1,$$

tehát a leképezés — a mondott feltételek mellett — minden valós x-re

$$x\mapsto\frac{x(x+3)}{2}-1.$$

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 30.

965. Egy ABC háromszög BC oldalára befelé (vagyis az A csúcsot tartalmazó félsíkban), az AB és AC oldalaira kifelé emeljünk rendre egy-egy azonos körüljárású, egymáshoz hasonló $BCDE$, $ACD'E'$, $BAD''E''$ konvex négyszöget! A $BCDE$ négyszög DE oldalára kifelé emeljünk az ABC háromszöghöz hasonló, vele egyező körüljárású FED háromszöget! (A hasonló sokszögek egymásnak

megfelelő csúcsait azonos sorrendben soroltuk fel.) Bizonyítsuk be, hogy az $AE'FD''$ négyszög paralelogramma!

Szánthó Gyula, Gyula

I. megoldás: A C csúcs körüli γ szögű és $\frac{AC}{BC}$ arányú forgatva nyújtás a $BCDE$ négyszöget az $ACD'E'$ négyszögbe viszi (1. ábra). Ekkor BE képe az AE' lesz.

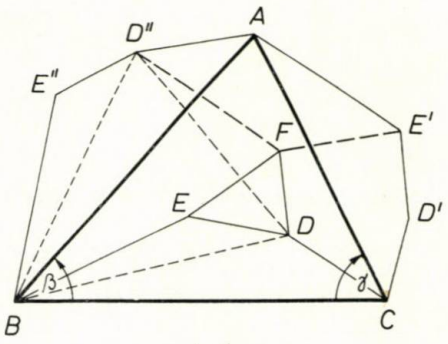
A B csúcs körüli β szögű és $\frac{AB}{BC}$ arányú forgatva nyújtás a $BCDE$ négyszöget a $BAD''E''$ négyszögbe viszi, ezért és $ABC\triangle \sim FED\triangle$ miatt

$$\frac{BD''}{BD} = \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{ED} \qquad (1)$$

Mivel $DBD'' \sphericalangle = \beta = DEF \sphericalangle$, ezért és (1) miatt

$$FED\triangle \sim D''BD\triangle .$$

Ez utóbbiból viszont következik, hogy a D csúcs körüli γ szögű, $\frac{DF}{DE} = \frac{AC}{BC}$ arányú forgatva nyújtás az EB szakaszt FD''-be viszi.



1. ábra

Láthatjuk tehát, hogy a C, illetve D pont körüli γ szögű $\frac{AC}{BC}$ arányú forgatva nyújtás EB szakaszt $E'A$-ba, illetve FD''-be viszi. Ezért $E'A$ és FD'' szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak, vagyis az $AE'FD''$ négyszög paralelogramma.

Bogdán Zoltán, Cegléd

II. megoldás: A feladat állítását a komplex számsíkon igazoljuk. Válasszuk origónak a B csúcsot és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{BC},\ c = |\overrightarrow{BA}|,\ x = |\overrightarrow{BD}|,\ y = |\overrightarrow{BE}|,\ \beta = CBA \sphericalangle,\ \delta = CBD \sphericalangle,\ \varepsilon = CBE \sphericalangle .$$

Legyen továbbá $|\mathbf{a}| = 1$. Ezekkel

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}\cdot c\cdot e^{i\beta}\quad \overrightarrow{BD} = \mathbf{a}\cdot x\cdot e^{i\delta},\ \overrightarrow{BE} = \mathbf{a}\cdot y\cdot e^{i\varepsilon},\ \overrightarrow{BD''} = \overrightarrow{BA}\cdot x\cdot e^{i\delta} = \mathbf{a}\cdot c\cdot x\cdot e^{i(\beta+\delta)}.$$

Mivel ezekből

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}\cdot y\cdot e^{i\varepsilon} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot y\cdot e^{i\varepsilon} = \mathbf{a}\cdot y\cdot e^{i\varepsilon} - \mathbf{a}\cdot c\cdot y\cdot e^{i(\beta+\varepsilon)},$$

továbbá

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BE}+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE})\cdot c\cdot e^{i\beta} = \mathbf{a}\cdot y\cdot e^{i\varepsilon}+\mathbf{a}\cdot c\cdot x\cdot e^{i(\beta+\delta)} - \mathbf{a}\cdot c\cdot y\cdot e^{i(\beta+\varepsilon)}$$

miatt

$$\overrightarrow{D''F} = \overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD''} = \mathbf{a}\cdot y\cdot e^{i\varepsilon} - \mathbf{a}\cdot c\cdot y\cdot e^{i(\beta+\varepsilon)}$$

adódik, ezért $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{D''F}$, és ezt kellett igazoljuk.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 10.

966. Az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ függvénynek az x_1 és x_2 helyen $(x_1\neq x_2)$ szélsőértéke van. Bizonyítsuk be, hogy az $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy, a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő egyenesre, ha $bc-9ad=0$!

Strohmajer János, Budapest

Megoldás: Az f függvény x_1, x_2 szélsőértékhelyei a függvény f' deriváltjának zérushelyei közül valók. Mivel

$$f'\colon\ 3ax^2+2bx+c,$$

ezért $f'=0$ gyökei

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$$

az f függvény szélsőértékhelyei, továbbá $b^2-3ac\neq 0$, $x_1\neq x_2$ miatt.

Az M_1 és M_2 pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy, az O origón átmenő egyenesre, ha az OM_1 és OM_2 egyenesek iránytangense egyenlő. Mivel

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{f(x_1)}{x_1}=ax_1^2+bx_1+c+\frac{d}{x_1}$$

és

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{f(x_2)}{x_2}=ax_2^2+bx_2+c+\frac{d}{x_2},$$

ezért

$$\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2=a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)+d\cdot\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\left[-a(x_1+x_2)+b-\frac{d}{x_1x_2}\right]=$$

$$=\frac{2\sqrt{b^2-3ac}}{a}\left(-a\cdot\frac{2b}{3a}+b-\frac{d}{\frac{c}{3a}}\right)=\frac{2\sqrt{b^2-3ac}(bc-9ad)}{9ac}.$$

Ez pedig $b^2-3ac\neq 0$ miatt akkor és csak akkor 0, ha $bc-9ad=0$.

Bizonyításunkban felhasználtuk, hogy $x_1\cdot x_2\neq 0$, azaz $c\neq 0$. Ha $c=0$, akkor x_1, x_2 egyike 0. Feltehető, hogy ez az x_1. Ekkor az $M_1(0;d)$ $M_2\left(-\frac{2b}{3a};f\left(-\frac{2b}{3a}\right)\right)$ és az origó akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\overrightarrow{OM_1}=\alpha\overrightarrow{OM_2}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$). Ez viszont $b\neq 0$ miatt (különben $x_1=x_2$), akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha=0$ és így $a=0$, azaz ha $bc-9ad=0$.

Matekovics Mihály, Arad
Szabó Zsófia, Békéscsaba

A megoldók száma: 27.

967. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív n egészre teljesül az

$$\frac{e^n-1}{e-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}k^k\leqq\frac{(\sqrt{e})^{n(n+1)}-(\sqrt{e})^n}{(\sqrt{e})^{n+1}-\sqrt{e}}$$

egyenlőtlenséglánc!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Mivel

$$\frac{e^n-1}{e-1}=\sum_{i=1}^{n-1}e^i$$

és $e<2^2$, továbbá $3\leqq k$-ra $e^{k-1}<k^{k-1}<k^k$, ezért

$$\frac{e^n-1}{e-1}\leqq 1+2^2+3^3+\ldots+n^n$$

és egyenlőség csakis az $n=1$ esetben áll fenn.

Az egyenlőtlenséglánc jobb oldalát is átalakítva előbbi oszthatósági szabályunkkal:

$$\frac{(\sqrt{e})^{n(n+1)}-(\sqrt{e})^n}{(\sqrt{e})^{n+1}-\sqrt{e}}=\sum_{i=0}^{n-1}\left((\sqrt{e})^{n+1}\right)^i\cdot(\sqrt{e})^{n-i-1}=\sum_{i=0}^{n-1}(\sqrt{e})^{(i+1)n-1}.$$

Ha megmutatjuk, hogy $k\geqq 2$-re

$$k^k<(\sqrt{e})^{kn-1}$$

akkor készen vagyunk. Mivel $k\leqq n$, így $k^2-1\leqq kn-1$, ezért elegendő azt igazolnunk, hogy

$$k^k<(\sqrt{e})^{k^2-1},$$

illetve az ezzel ekvivalens

$$k \ln k < \frac{k^2-1}{2}$$

egyenlőtlenséget.

Tekintsük az F: $[2; \infty] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x \ln x - \frac{x^2-1}{2}$ függvényt.

Ennek első, illetve második deriváltja:

$$F'(x) = \ln x + 1 - x, \quad F''(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Mivel $F'(2) < 0$ és $x \geqq 2$-re $F''(x) < 0$, ezért $F'(x)$ az adott intervallumon csökkenő és így $F'(x) < 0$, ha $x \geqq 2$. Ebből viszont az következik, hogy az $F(x)$ is csökkenő, az értelmezési tartományán.

Mivel $F(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} < 0$, ezért $x \geqq 2$-re $F(x) < 0$, azaz

$$k \ln k < \frac{k^2-1}{2}$$

minden $2 \leqq k$ egészre.

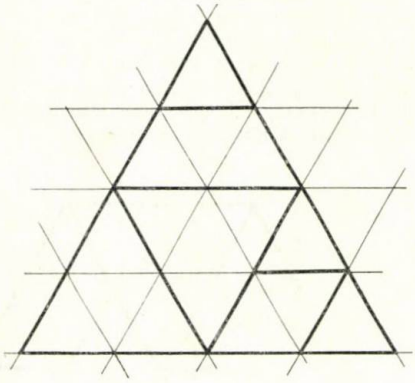
Ezzel beláttuk a feladat állításának helyességét, sőt azt is, hogy egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $n = 1$.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely, Kamarás Lajos, Pécs, Matekovics Mihály, Arad

A megoldók száma: 12.

968. Egy szabályos háromszög egyik oldalát négy egyenlő részre osztottuk, és az osztópontokban az oldalakkal párhuzamosakat húzva a háromszöget hét darabra vágtuk (2. ábra).

Határozzuk meg azokat a konvex sokszögeket, amelyeket e hét darab maradéktalan felhasználásával összerakhatunk!



2. ábra

I. megoldás: Tekintsük az ábrán keletkezett legkisebb háromszöget (oldala az eredetinek negyede) egységnek! Az eredeti háromszög 16 ilyen egységből áll. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen konvex sokszögek rakhatók össze 16 ilyen egység maradéktalan felhasználásával, s ezek közül melyek azok, amelyek a feladatbeli hét darabbal lefedhetők.

Helyezzünk a síkra egységünknek megfelelő szabályos háromszögrácsot! Konvex sokszögeinket az egységből álló és a rendre egymáshoz csatlakozó sávokban levő darabjaikból fogjuk előállítani.

A konvexitás miatt

a) szomszédos sávokban levő egységnyi háromszögek számának különbsége legfeljebb kettő lehet;

b) ha egy sávban páros sok egység van, akkor az ezzel szomszédos sávokban azonos számú, vagy eggyel kevesebb egység lehet;

c) ha egy sávban páratlan számú egység van, akkor a vele szomszédos sávoknak csak egyikében lehet ugyanannyi egységdarab, a másikban pedig kettővel kevesebb.

d) két ugyanannyi páratlan sok egységet tartalmazó sáv között csak eggyel több egységet tartalmazó sávok lehetnek.

E feltételek mellett kell a 16-ot összeadandókra bontani. Az összeg tagjainak száma és sorrendje fogja megszabni, hogy az egymáshoz rendre csatlakozó sávokban a keletkező konvex sokszögnek hány egységnyi darabja van.

Ha sokszögünk két sávba fér (egy sávba nem férhet, hiszen a hét darab között van olyan, mely két sávba fér csak el), akkor az *a*, *b*, *c*, feltételek miatt csakis a

$$9+7 \tag{1}$$

és

$$8+8 \tag{2}$$

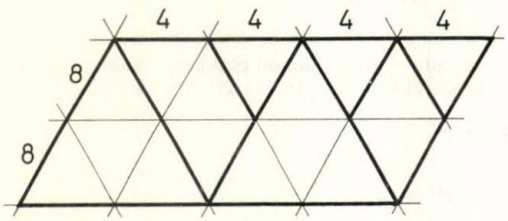
felbontás lehetséges.

Három sávba a 16 egység az előbbi és a *d)* feltételek mellett csakis az

$$5+6+5 \tag{3}$$

módon kerülhet.

Ha sokszögünk négy sávhoz tartozik, akkor a feltételek miatt a



3. ábra

$$4+4+4+4 \tag{4}$$

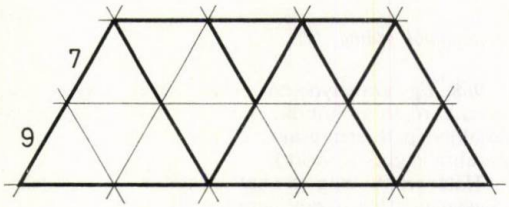
$$3+5+5+3 \tag{5}$$

$$1+3+5+7 \tag{6}$$

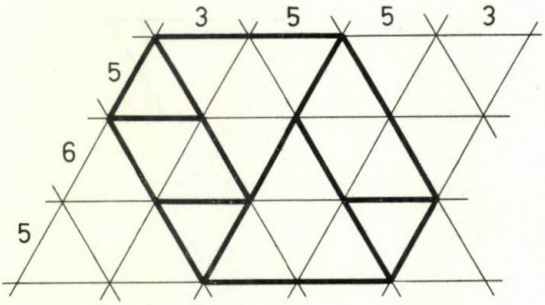
feldarabolások lehetségesek.

Ha a konvex sokszög egységdarabjai négynél több sávban férnek el, akkor valamely egységdarab középpontja körüli $k \cdot 120°$-os (k egész szám) elforgatás a rácsot önmagába viszi, a sokszöget pedig négynél nem több sávba forgatja. Ellenkező esetben ugyanis sokszögünk kerülete legalább 15 egység, és ekkora kerületű 16 egységlemezből álló konvex sokszög nincs. Ennélfogva a 16-nak négynél több tagú, a feltételeknek megfelelő felbontása a korábbi felbontások egyikéhez tartozó sokszöghöz vezet.

A hat lehetséges eset mindegyike megvalósítható és a hét darabbal lefedhető. A (2) és a (4), illetve a (3) és az (5) ugyanahhoz a paralelogrammához, illetve hatszöghöz vezet, míg az (1) szimmetrikus trapézt, a (6) pedig az eredeti háromszöget adja (3., 4., 5. ábra). Ezek szerint az eredeti háromszög darabjaiból ez a négyféle konvex sokszög rakható össze, természetesen mindegyik többféleképpen is.



4. ábra



5. ábra

Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: A darabok felhasználásával összerakható konvex sokszögek mindegyikének csak $\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{2\pi}{3}$ nagyságú szögei lehetnek, mivel a darabok mindegyike is ilyen tulajdonságú.

Tegyük fel, hogy egy, a darabokból összerakható konvex sokszögnek k darab $\frac{\pi}{3}$ és l darab $\frac{2\pi}{3}$ nagyságú szöge van. Ekkor a $(k+l)$ oldalú sokszög szögösszege:

$$(k+l-2)\pi = k \cdot \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2\pi}{3},$$

amiből $2k+l=6$.

Mivel k és l nem negatív egészek, ezért k és l lehetséges összetartozó értékpárjai: (3; 0), (2; 2), (1; 4) és (0; 6).

A (3; 0) esetben a sokszög az eredeti háromszöggel egybevágó. A (2; 2) esetben a 2—2 egymással egyenlő szög vagy szemköztes, vagy sem. Az első esetben paralelogrammát, a második esetben szimmetrikus trapézt kaphatunk.

Vizsgáljuk meg, hogy létrejöhetnek-e ezek a sokszögek, és milyen oldalhosszúságokkal!

Legyen a paralelogramma két oldala x, illetve y. A paralelogramma területe megegyezik az eredeti háromszög területével:

$$xy \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

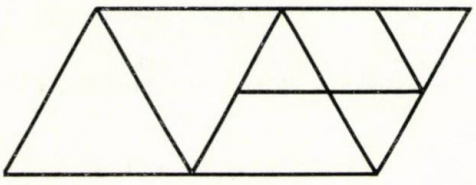
ahol a az eredeti háromszög oldala. Mivel x és y az $\frac{a}{4}$-nek egész számú többszöröse kell legyen, ezért

$$x = \alpha \cdot \frac{a}{4} \quad \text{és} \quad y = \beta \cdot \frac{a}{4} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{N}).$$

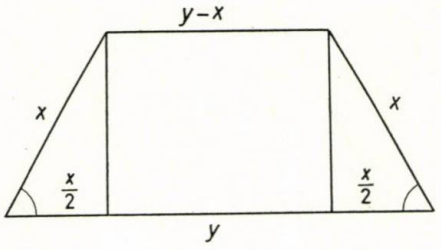
Ezeket előbbi egyenlőségünkbe téve,

$$\alpha \cdot \beta = 8$$

kell legyen. Feltehető, hogy $x \leqq y$, azaz $\alpha \leqq \beta$. Ekkor az $\alpha=1$, $\beta=8$ vagy az $\alpha=2$, $\beta=4$ választás lehetséges. Az első esetben adódó $x=\frac{a}{4}$, $y=2a$ oldalú paralelogrammába nem helyezhető el az $\frac{a}{2}$ oldalú szabályos háromszögdarab. A második esetben adódó $x=\frac{a}{2}$, $y=a$ oldalú paralelogramma viszont többféleképpen is előállítható az eredeti háromszög darabjaiból. Egy ilyen, a 3. ábrától különböző elállítást ábrázol a 6. ábra.



6. ábra



7. ábra

Ha a szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja y és szárai x hosszúságúak, akkor a negyedik oldal $y-x$ hosszúságú (7. ábra). A trapéz területe és az eredeti háromszög területe egyenlő, azaz

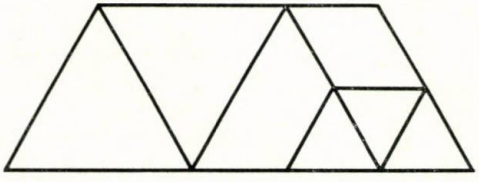
$$\frac{2y-x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

vagyis

$$(2y-x)x = a^2.$$

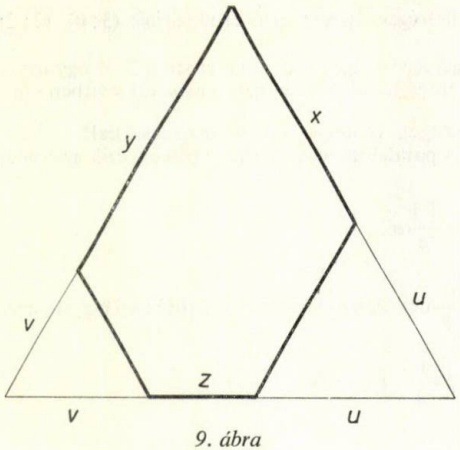
Felhasználva, hogy x és y az $\frac{a}{4}$ többszörösei, előbbi egyenlőségünkből

$$(2\beta-\alpha)\alpha = 16$$



8. ábra

adódik. Mivel $y-x>0$ ezért $\beta>\alpha$. Az α páros és 16 osztója kell legyen, így előbbi feltételünk miatt csakis az $\alpha=2$ lehetséges. Ekkor $x=\frac{a}{2}$ és $y=\frac{5a}{4}$. Az előbbi megoldásban látottaktól eltérő összerakást mutat a 8. ábra.



9. ábra

A $k=1$, $l=4$ esetben ötszöget kell előállítanunk a háromszög darabjaiból. Megmutatjuk, hogy ilyen előállítás nincs. Ha ugyanis lenne, akkor a 9. ábra jelöléseivel, a területekre fennáll:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+y-z)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-z)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(y-z)^2,$$

hiszen $u+x=v+y=z+u+v$-ből $u=y-z$ és $v=x-z$. Ezek szerint $x>z$, $y>z$ és

$$a^2 = 2xy - z^2.$$

Felhasználva, hogy $x=\alpha\cdot\frac{a}{4}$, $y=\beta\cdot\frac{a}{4}$ és $z=\gamma\cdot\frac{a}{4}$,

$$16 = 2\alpha\cdot\beta - \gamma^2$$

eredményre jutunk. Ennek alapján γ páros és így az $\alpha\cdot\beta$ is páros kell legyen. Feltehető, hogy $\alpha=2\alpha_1$. Ezt és $\gamma=2\gamma_1$ kifejezéseket előbbi egyenlőségünkbe helyettesítve, egyszerűsítés után

$$\gamma_1^2 = \alpha_1\cdot\beta - 4$$

adódik. Mivel $\gamma_1 \geqq 1$ és $x>z$, $y>z$ miatt $\alpha_1>\gamma_1$ és $\beta>2\gamma_1$, ezért

$$\gamma_1^2 = \alpha_1\cdot\beta - 4 > 2\gamma_1^2 - 4,$$

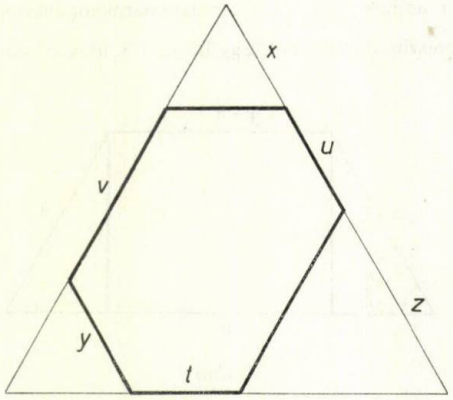
amiből

$$\gamma_1^2 < 4,$$

azaz $\gamma_1=1$ lehet csak. Az ebből adódó $5=\alpha_1\beta$ egész megoldásai viszont nem tesznek egyszerre eleget a fenti $\alpha_1>\gamma_1$ és $\beta>2\gamma_1$ feltételpárnak.

Ezzel igazoltuk, hogy megfelelő tulajdonságú ötszög nem rakható össze a darabokból.

Végezetül a $k=0$, $l=6$ esetet vizsgálva, a 10. ábra jelöléseivel



10. ábra

$$x+u+z = x+v+y = y+t+z,$$

ahonnan

$$v = z-y+u \quad \text{és} \quad t = x-y+u.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u \geqq y$. A területekre az átdarabolás miatt igaz, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = (x+u+z)^2\frac{\sqrt{3}}{4} - x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} - y^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} - z^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ebből

$$x = \alpha\cdot\frac{a}{4},\ y = \beta\cdot\frac{a}{4},\ z = \gamma\cdot\frac{a}{4} \quad \text{és} \quad u = \delta\cdot\frac{a}{4}$$

helyettesítésekkel rendezés és egyszerűsítés után

$$16 = \delta^2 - \beta^2 + 2\alpha\cdot\gamma + 2\alpha\cdot\delta + 2\gamma\cdot\delta \qquad (*)$$

adódik, ahol α, β, γ, δ pozitív egészek, és $u \geqq y$ miatt $\delta \geqq \beta$.

Legyen $\delta>\beta$! A $(*)$ miatt δ és β azonos paritású kell legyen, ezért $\delta^2-\beta^2 \geqq 8$. Ezt felhasználva, $(*)$-ból

$$4 \geqq \alpha\gamma + \alpha\cdot\delta + \gamma\cdot\delta$$

következik. Mivel α, γ, δ a jobb oldali összeg két-két tagjában szerepel, ezért előbbi relációnknak csakis az $\alpha=\gamma=\delta=1$ tesz eleget. Ez a lehetőség azonban nem elégíti ki a $\delta>\beta>0$ feltételt.

Így $\delta=\beta$ kell legyen. Ez esetben (*) így alakul:

$$8 = \alpha\cdot\gamma+\alpha\cdot\delta+\gamma\cdot\delta.$$

Változóink legkisebbike 1 kell legyen, különben előbbi összegünk jobb oldalán legalább 12 áll. Egyenletünkben szereplő változók szerepének szimmetriája miatt feltehető, hogy $\alpha=1$.

Ekkor

$$8 = \gamma\cdot\delta+\gamma+\delta = (\gamma+1)(\delta+1)-1$$

miatt

$$9 = (\gamma+1)(\delta+1)$$

és ennek γ, δ pozitív volta miatt csak a $\gamma=\delta=2$ tesz eleget.

Ekkor

$$x = t = \frac{a}{4}, \quad y = z = u = v = \frac{a}{2}.$$

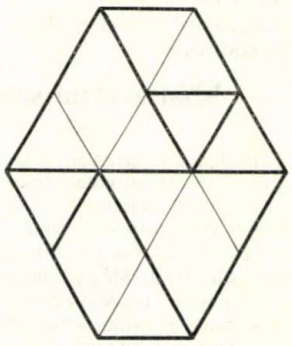
A hatszög szemköztes oldalai tehát egyenlők. Ezzel — figyelembe véve nyert adataink szimmetriáját — a hatszöget az egybevágóság erejéig meghatároztuk. A fenti méretű hatszög összerakható a darabokból (5. ábra).

Összefoglalva: Egybevágóság erejéig 4 különböző sokszög rakható össze a darabokból,

a oldalú szabályos háromszög,

a, $\frac{a}{2}$ oldalú paralelogramma,

$\frac{5a}{4}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{3a}{4}$, $\frac{a}{2}$ oldalú szimmetrikus trapéz és a 11. ábra szerinti centrálszimmetrikus hatszög.



11. ábra

Bartha Gábor, Szentendre

Megjegyzés: Előbbi megoldásunkban, a lehetőségek vizsgálatakor, nem vettük figyelembe, hogy eredeti háromszögünk hány darabból áll, csak annyit használtunk fel, hogy a sokszögdarabok szögei $\frac{\pi}{3}$ vagy $\frac{2\pi}{3}$ nagyságúak. Ezért háromszögünket bármilyen sok ilyen darabra vágva, a darabokból legfeljebb hatoldalú sokszög rakható össze.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 8.

A megoldók névsora (963—968)

Ambrus Gabriella, Budapest (964—966.); Bagi Gábor, Barcs (963.); Bartha Gábor, Szentendre (963—968.); Bencze Mihály, Brassó (963., 964., 966., 967.); Bogdán Zoltán, Cegléd (963—968.); Csorba Ferenc, Győr (963., 964., 966., 968.); Csordás Mihály, Kiskunmajsa (963., 966.); Csősz Sándor, Dunakeszi (963., 964., 967., 968.); Gábor Rezső, Kézdivásárhely (963., 964., 966.); Gőgh József, Gúta (963., 964., 966.); Hárspatakiné, Dékány Veronika (963., 964.); Hencz Tihamér, Gúta (964.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (963., 964., 966.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (963. két mód, 964. két mód, 966., 968.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (963. négy mód, 964., 966., 967.); Kamarás Lajos, Pécs (963—968.); Kovácsné, Gajdács Ibolya, Budapest (963., 964., 966.); Dr. Major Pál, Budapest (963., 965., 966., 968.); Major Piroska, Budapest (963., 964., 966.); Matekovics Mihály, Arad (963., 964., 966., 967.); Máté Bálint, Pécs (963., 964., 966., 967.); Mészáros József, Galánta (963., 964., 966.); Moyzes Károly, Szeged (963.); Molnár Sándor, Dunakeszi (964., 966.); Nagy Imecs Vilmos, Gyergyószentmiklós (963., 964.); Nyirő László, Mezőkövesd (963., 964., 966.); Oláh György, Komárom (CSSR) (963.); Pogány János, Budapest (964., 966.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (963—966.); Szánthó Gyula, Gyula (963—967.); Szigeti Béláné, Győr (964.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (963. három mód, 964—968.); Vermes Miklós, Budapest (967.); Zalán Péterné, Budapest (963—966.); Zsidó György, Kolozsvár (963—967.).

Helyreigazítás

Lapunk 1981. évi **5.** számában a 157. oldalon a felülről számított 12—14. sorok — sajnálatos módon — hibásan jelentek meg.

E sorok helyes szövege a következő:

$$3c \leqq 2e. \tag{3}$$

A (2)-ből c-t kifejezve és (3)-ba beírva, átrendezés után kapjuk a poliéderünkre érvényes

$$e \leqq 3l - 6 \tag{4}$$

A fenti hibákra *Bogdán Zoltán* ceglédi olvasónk hívta fel figyelmünket. Szívességét ez úton is hálásan köszönjük.

Az elkövetett hibákért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A Szerkesztőség

SZÉNÁSY MIHÁLY
középiskolai szakfelügyelő
Székesfehérvár

Módszertani segítség a középiskolai matematikatanároknak

Általános tapasztalat, hogy az eredményesen dolgozó matematikatanároknak nem csupán a tankönyv az egyetlen forrásuk a tanítás során, hanem változatos formában, célirányosan használnak fel különböző szakkönyveket, módszertani könyveket. Még jól használható tankönyvsorozat esetén is szeretnek egyéni színeket, saját koncepciót belevinni a tanításba. Az új tantervi irányelvek is kiemelten hangsúlyozzák a tanári önállóság, az alkotó aktivitás kibontakozásának fontosságát. Ez különösen akkor tűnik nélkülözhetetlennek, amikor egyes tankönyvek használhatóságát illetően erősen megoszlanak a vélemények. Utalunk itt e folyóirat hasábjain napvilágot látott polémiára (l. A Matematika Tanítása 1980. évi 2. és 5. számát!).

E rövid ismertetés keretében egy hasznosnak ígérkező módszertani szakkönyv-sorozatra szeretném felhívni a középiskolai matematikatanárok figyelmét. A sorozat címe: „A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában". A sorozatból eddig két kötet jelent meg. Az első kötet *Dr. Peller József:* **Ponthalmazok, számhalmazok, polinomok, függvények, algebra**; a második *Dr. Rédling Elemér:* **Geometriai transzformációk**. E két könyv a középiskolák I. osztályos tantervi anyagának újszerű feldolgozását tartalmazza. (A II. osztály anyagát tárgyaló két kötet várhatóan 1982-ben jelenik meg.)

E módszertani könyvek alapját az ELTE Matematikai Szakmódszertani Csoportjának kiadásában 1973—77 között megjelent jegyzetsorozat képezi, amely abban az időben nagy népszerűségnek örvendett a középiskolai matematikatanárok körében. E jegyzetekben vázolt módszert és anyagfelépítést kísérletileg is kipróbálták több fővárosi, Fejér megyei, Tolna megyei gimnáziumban és szakközépiskolában. E *kísérletek tapasztalatai* alapján került sor az anyag javítására, finomítására, a feldolgozáshoz szükséges óraszámok kialakítására. Ez az átdolgozott és a gyakorlatban megvalósíthatónak bizonyult anyag képezi e kiadvány tárgyát. (A gyakorlati kipróbálás — véleményünk szerint — minden új tantervi dokumentum használhatóságának elsőrendű kritériuma. Sajnos, bizonyos új tankönyvek bevezetésénél ez a szempont egyáltalán nem esett latba. Ez a körülmény — amint saját bőrünkön érezzük — jóvátehetetlen hibákhoz vezethet.)

A kötetekben feldolgozott anyag összhangban van az új középiskolai tantervekkel, némileg túl is mutat a terveken, s egy jövőbeni reformnál is figyelemre méltó indításokat adhat.

Az I. kötet ismertetése

A sorozat I. kötete sokoldalúan elemzi matematikaoktatásunk állapotát, fejlődésének tényezőit. Tudományos igénnyel foglalkozik a matematikai *ismeretszerzési folyamat tervezésének* alapjaival. Indokolja és vázolja a sorozat alapjául szolgáló kísérlet koncepcióját, ismerteti módszerét. A matematikai ismeretszerzési folyamat szerkezetét *szintek, szakaszok, tevékenységsorok, feladatcsoportok* rendszerében adja meg. Az egyes fejezetek elején található matematikai-didaktikai elemzések segítséget nyújtanak a tanári tervezéshez. A munkafüzet-fejezetek értékes feladatcsoportjai pedig lehetővé teszik a tanulók tevékenységére alapozott oktatási módszerek kombinatív alkalmazását. Az anyag felépítése vázlatosan a következő:

I. Ponthalmazok. Tartalmazza a régi „Mértani hely" témakör anyagát újszerű felfogásban, kiegészítve a koordináta-rendszer kérdéskörével.

II. Számhalmazok, polinomok. Az anyag elrendezése a *számkörbővítés logikai menetéhez* igazo-

dik. A természetes, az egész, a racionális, a valós számok halmaza sorrendjében építi az anyagot, s mindegyik számkörhöz társítja a megfelelő algebrai részeket is. A természetes számokhoz kapcsolódik az elemi számelmélettel való alaposabb foglalkozás. Az egész számoknál kerül sorra a zárójelek felbontása, a kiemelés, nevezetes szorzatok, polinomok tárgyalása. Mindegyik számkör tárgyalásának kapcsán olyan egyenletek (egyenlőtlenségek) megoldására is sor kerül, amelyeknek gyöke az adott számhalmaznak eleme (vagy megállapítást nyer, hogy az adott halmazban nincsen gyöke az egyenletnek, egyenlőtlenségnek). A racionális szám fogalmát — mint törtek ekvivalencia-osztályait — feladatcsoportok segítségével világítja meg. A racionális szám tizedes tört alakja előkészíti a valós számok bevezetését. I. osztályban a valós szám mint végtelen, nem szakaszos tizedes tört kerül szóba. Így lehetővé válik egyenlőtlenségek megoldáshalmazának számegyenesen való szemléltetése, s a függvények tanítása is könnyebbé válik a valós szám fogalmának ismeretében.

Az első két témakör keretében történik meg az *alapvető halmazfogalmak és logikai fogalmak* kialakítása; a tanulók megismerkednek a halmazokkal kapcsolatos szimbolikával, és sor kerül a *tanulók logikai nyelvezetének fejlesztésére.* A szerző figyelmeztet arra, hogy az új fogalmak és jelölésrendszerek bevezetésénél csak nagyon óvatosan és a fokozatosság elvét következetesen betartva szabad eljárni: „A halmazszemléletet az anyag jobb megértése érdekében alapozzuk meg és fejlesztjük ki a tanulókban. A csábító lehetőségek felhasználásában célszerű mértéket tartani." Nagyon megszívlelendő tanács ez mindennapi munkánkhoz, ha azt tekintjük, hogy egyes dokumentumok öncélúan, megfelelő érési idő biztosítása nélkül, egyszerre zúdítják a tanulókra az új fogalmakat és jelöléseket, felidézve egy új formalista tanításmód veszélyét.

III. Függvények. Az I. osztályos tananyag központi témaköre. A szerző alapvető didaktikai feladatának tartja, hogy a tanulók a maguk tapasztalataira, ismereteire építve, tevékenységük célszerű megszervezésével alkossák meg a függvény definícióját. Bőséges, változatos feladatanyag segíti a megismerés első fázisát: a tapasztalatszerzést. A definíció megalkotása után a valós változójú, valós értékű függvények I. osztályban tárgyalható típusai kerülnek részletes feldolgozásra. Alapvető cél az, hogy a tanulók az elsőfokú függvények halmazában teljes biztonsággal tájékozódjanak. A feldolgozásmód olyan, hogy a matematikai analízis alapvető fogalmainak kialakítása már itt kezdetét veszi. Lényeges szempont, hogy az értéktáblázathoz kötődő sztatikus szemlélettől a tanulók idejében elszakadjanak. *Nem a függvény egyes értékei, hanem a függvény tulajdonságai válnak a vizsgálat tárgyává;* a tanulók figyelmét a folyamat egészére kell irányítani. A függvények egyszerű transzformációinak vizsgálatára is sor kerül — a tapasztalatgyűjtés szintjén.

IV. Algebra. Műveletek a polinomok hányadosainak körében. Ebben a részben kerül sor az algebrai törtek, az elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek, egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerek — közöttük szöveges feladatok — tárgyalására. Lényegében a polinomokra vonatkozó ismeretek alkalmazásairól van szó.

A második kötet ismertetése

A sorozat második kötete a középiskolai geometriaanyag első fejezeteinek elemzését s módszertani feldolgozásának egy modelljét tartalmazza. A szerző a könyv első részében alapos áttekintést ad a tananyag matematikai hátteréről, a fogalmak kialakulásának történeti vonatkozásairól, és ismerteti a geometriai gondolkodásmód fejlődésének egy szintrendszerét. Sokoldalúan elemzi a geometriai transzformációk tanításának problémakörét, s az így levonható megállapításoknak megfelelően építi fel a tananyagot.

A geometriai transzformációkat következetesen ponthoz pontot rendelő *függvényként* tárgyalja, ezáltal szerves kapcsolatot teremt a geometria és a középiskolai matematikaanyag más témakörei, így a függvénytan és az algebra között. Ugyanis a tanulókban csak akkor alakulhat ki egységes kép a matematikáról, ha a geometriai transzformációkat is függvényként fogják fel, hiszen az iskolai matematika egyik alapvető fogalma éppen a függvény, s a geometriai transzformáció is az. Ma még gyakran jelentkező probléma, hogy középiskolai szinten a tanulók csak alakzatok átviteleként vagy szerkesztési utasítások összességeként tekintik a transzformációkat és sok esetben meg is rekednek ennél a kezdetleges szemléletnél.

A kötet középpontjában a *sík és a tér egybevágósági transzformációinak* módszertani feldolgozása áll. A különböző transzformációkat egységes szempontrendszer szerint tárgyalja. Egymással párhuzamosan szerepelteti a tér- és síkgeometriát, a sík egybevágóságait a tér egybevágóságaiból származtatja. A tananyagban szereplő tételeket és ezek alkalmazásait a transzformációk köré csoportosítja. Az egész munkán végigkövethető az a törekvés, hogy a tanulók fokozatosan jussanak el egy magasabb absztrakciós szintre.

A könyv *I. fejezete* a véges halmazok leképezéseivel foglalkozik. A tanulók számára ugyanis a véges halmaz és ennek leképezései áttekinthetőbbek, kézzelfoghatóbbak, mint a végtelen halmazok leképezései, ezért az előbbiek körében könnyebben alakítható ki a geometriai transzformáció fogalma. Fontos didaktikai elv az is, hogy kezdetben a tárgyhalmaz és a képhalmaz különbözzön egymástól. Csak ilyen példák után térhetünk rá véges ponthalmazok önmagukra való leképezéseire.

A *II. fejezet* már végtelen ponthalmazok speciális leképezéseit tartalmazza. A fejezet középpontjában a *merőleges vetítés* mint ponttranszformáció áll. A merőleges vetítés esetén ugyanis — ellentétben a sík és a tér egybevágósági transzformációival — a tárgy- és a képhalmaz még különbözik egymástól. Emellett ez a leképezés nem távolságtartó, és itt az egyenes képe nem mindig egyenes. A merőleges vetítés tehát — mint „ellenpélda" — segíti az egybevágósági transzformáció fogalmának felfogását. A merőleges vetítés tárgyalásához természetes módon csatlakoznak a *térelemekkel* kapcsolatos különböző ismeretek is.

A *III. fejezetben* már végtelen ponthalmazok önmagukra való leképezései szerepelnek. Ezek a transzformációk már egyenes- és távolságtartók, de még nem kötődnek a fizikai mozgás képzetéhez. Ilyen a *térnek síkra,* ill. *pontra való tükrözése.* Ebben a fejezetben e két transzformáció tárgyalását találhatjuk meg.

A *IV. fejezet* vezet el azután a *mozgással származtatható transzformációk* vizsgálatához, tulajdonságainak megállapításához. A szerző a sík- és a térmozgás általános fogalmának kialakítása után ezek speciális eseteivel: a tér tengelykörüli elforgatásával és eltolásával foglalkozik részletesebben, hiszen elsősorban ezek képezik a továbbhaladáshoz szükséges tananyagot. Ebben a fejezetben kerül sor az egybevágósági transzformáció, illetve az alakzatok egybevágósága fogalmának kialakítására.

Az *V. fejezet* a tantervben előírt különböző *geometriai tételeket* és azok bizonyításait tartalmazza. Jó lehetőség nyílik itt arra is, hogy a tanulók matematikai tevékenységet végezzenek egy-egy kisebb anyagrész *lokális rendezésével,* s így fejlesszék geometriai szemléleti szintjüket. (Példaként az egyenlő szárú háromszög, illetve a paralelogramma témakör feldolgozását említjük meg.)

A *VI. fejezetben* a szerző *összefoglalja* és *rendszerezi* a feldolgozott tananyag fontosabb elemeit. Nagy súlyt helyez arra, hogy előtérbe állítsa az anyag belső kapcsolatait, fejlessze a tanulók deduktív gondolkodásmódját, s előkészítse a II. osztályos geometriaanyag tanítását is.

A könyvben sok kidolgozott mintafeladatot, s minden fejezet végén feladatgyűjteményt is találhatunk. A feladatok egy része a fogalmak, tételek előkészítését, érlelését segíti elő. Ezek közül több is egy-egy kérdés-, illetve példacsoportból áll. Az ilyen feladatok az ismeretanyag egy kis egységét, „molekuláját" tartalmazzák. Ezek *önálló* feldolgozásával, majd *közös* megbeszéléssel és tanári kiegészítésekkel halad előre az ismeretszerzés folyamata. Így a tanulók maguk is részesei az új fogalmak kialakításának.

A feladatok másik része az ismeretek alkalmazását és elmélyítését szolgálja. Meghatározott logikai rendbe állítva követik egymást; a legtöbb feladat olyan, hogy előkészíti a következőt, feltételezi az előzőnek a megoldását. Az így kialakuló feladatsorok hathatósan segíthetik a tanár munkáját. Az összeállítás érdeme, hogy igyekszik átmenteni a régebbi tankönyvek jól bevált feladatait is.

A könyv nem ad kész recepteket a geometria oktatásához. A szerző célja elsősorban az, hogy segítséget nyújtson a tanári tervező munkához. A könyv több anyagot tartalmaz annál, amit a jelenlegi órakeretek között fel lehet dolgozni. Ezért a tárgyalt anyagból — a rendelkezésre álló időnek és az osztály képességeinek megfelelően — a szaktanárnak válogatnia kell. A feldolgozás érdeme a nagyfokú rugalmasság. Bármely fejezet anyaga — a tantervi koncepció alapján — a tanár belátása szerint szűkíthető vagy bővíthető. A kötet szakköri anyagot s szakkörben feldolgozásra javasolható feladatokat is bőségesen tartalmaz. Jól hasznosítható a kötet a tanári önképzésben, továbbképzésben is.

A könyvsorozat jelenlegi szakmódszertani irodalmunkban hiányt pótol. Bizonyosra vehető, hogy tanáraink, ha megismerik és használatba veszik, munkájukhoz igen hasznos és értékes segítőtársra találnak benne.

E kötetek kapcsán említjük meg azt, hogy *nincs megnyugtatóan megoldva a pedagógiai, módszertani kiadványok ismertetése, terjesztése.* A cikkünkben ismertetett két kötet megjelenéséről sem kaptak a matematikatanárok tájékoztatást. Legfeljebb csak azok ismerhették meg, akik valamelyik könyvesboltban véletlenül észrevették a köteteket. De így is túlnyomórészt csak a fővárosi tanárok juthattak hozzá, mert — tapasztalataink szerint — sok vidéki könyvesboltba egyáltalán nem jutott el a kiadvány.

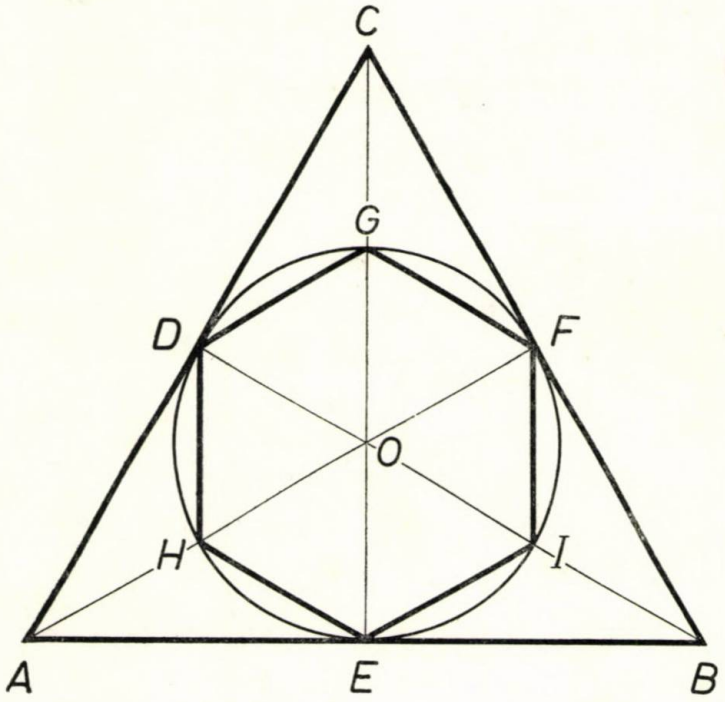
Érthetetlen a tanároknak szóló könyvek terjesztésének jelenlegi rendje, amely azt eredményezi, hogy értékes, jól használható kiadványok elvesznek az ismeretlenség, a közöny homályában, s ennek oktatásunk látja kárát. Az ismertetett két kötetet másfél évvel az első, fél évvel a második kötet megjelenése után a tanárok jelentős része még nem ismeri.

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1982. március * XXIX. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYÍLAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-316—Szegedi Nyomda—F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1981. évi vetélkedőjének országos fordulójáról 33
Rácz János: Néhány feladat és megoldása ürügyén (2. rész) 41
Dr. Csirmaz László—Dr. Simonovits Miklós: Algoritmusok I. 47
Bogdán Zoltán: Néhány gondolat a gimnáziumi matematika-szakkör érdekében ... 56
FELADATOK 58
Közlemény a Nemzetközi Matematikai Kongresszusról 63
Közlemény az 5. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról IV

СОДЕРЖАНИЕ

Новак Ласлонэ: О всевенгерском туре соревнования математиков-пионеров 1981 г. 33
Рац Якош: По поводу нескольких задач и их решений (часть 2.) 41
Д-р. Чирмаз Ласло—Д-р. Шимонович Миклош: Алгоритмы I. 47
Богдан Золтан: Некоторые соображения в интересах математических кружков в гимназиях 56
ЗАДАЧИ 58
Сообщение о Международном Конгрессе Математиков 63
Сообщение о 5-ом Международном Конгрессе по Преподаванию Математики IV

INHALT

Frau Borbála Novák (geb.: *Kapczár*): Bericht über die Landesrunde des Wettstreits der Pionier-Mathematiker im Jahre 1981 33
Rácz, János: Unter dem Vorwand einiger Aufgaben und ihrer Lösungen (2. Teil) 41
Dr. Csirmaz, László—Dr. Simonovits, Miklós: Algorithmen I. 47
Bogdán, Zoltán: Einige Gedanken im Interesse des mathematischen Fachzirkels im Gymnasium 56
AUFGABEN 58
Mitteilung über den Internationalen Kongreß der Mathematiker 63
Mitteilung über den 5-ten Internationalen Kongreß des Mathematikunterrichtes ... IV

NOVÁK LÁSZLÓNÉ
osztályvezető-helyettes
Budapest, OPI

Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1981. évi vetélkedőjének országos fordulójáról

Az 1980—81. tanévben ismét sor került az Úttörő-matematikusok vetélkedőjére. A vetélkedőt — az előző tanévhez hasonlóan — a Magyar Úttörőszövetség, a Művelődési Minisztérium, az Országos Pedagógiai Intézet és a Bolyai János Matematikai Társulat közösen hirdette meg 7. és 8. osztályosok számára. A vetélkedő célja a pajtások matematikai érdeklődésének felkeltése, illetve fokozása, és a felkészülés során a tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése, a matematikai tehetségek gondozása.

A csapatversenyben, a járási és megyei fordulókon sikeresen szereplők közül 82 hetedikes és 107 nyolcadikos pajtás juthatott az országos döntőbe. Az országos fordulóra Csillebércen került sor az egyéb úttörő-vetélkedőkkel, -szemlékkel egyidőben. A nagy létszám miatt két napig tartott a verseny. Az első napi eredmény alapján 40 hetedikes és 34 nyolcadikos került a döntőbe, akik között második napon dőlt el a sorrend.

A feladatok és megoldásuk

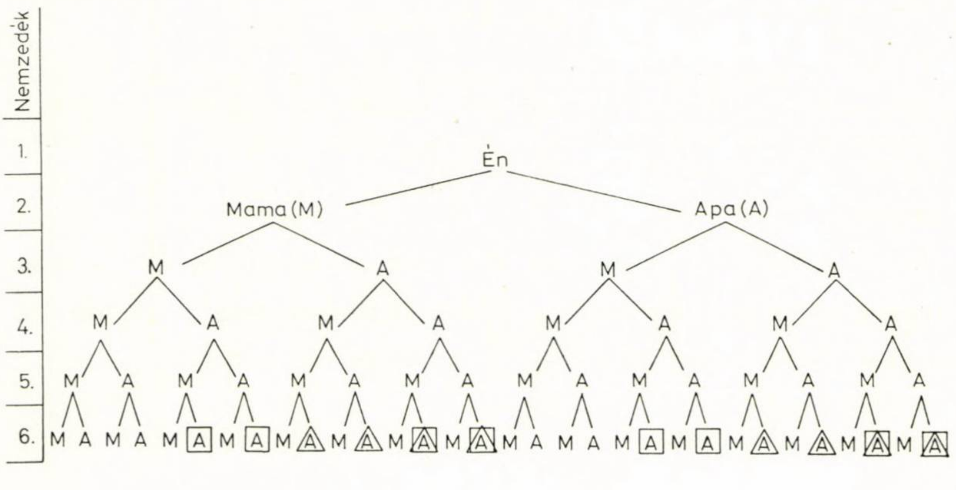
(A leírt megoldásmódok a legeredményesebben szereplő pajtások gondolatait tartalmazzák.)

7. osztály

Az első napi feladatok

1. Igaz-e, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazok a személyek?

Megoldás:
A tanulók a helyes megoldást fadiagram segítségével kapták meg.
Például ilyennel:



□-tel a „dédapáink nagyapjait", △-gel a „nagyapáink dédapjait" jelölő betűket kereteztük be. Az ábráról látható, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai nem mind ugyanazok a személyek. A helyes megoldásért 3 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 53%.

2. Egy számról a következőket tudjuk: ha a 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 számok akármelyikével osztjuk, akkor marad 1, ha viszont 7-tel osztjuk, akkor nincs maradék. Melyik lehet ez a szám?

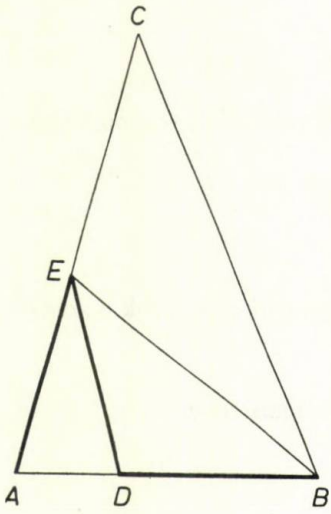
Megoldás:

A 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11 közös többszöröseinél 1-gyel nagyobb számok közül azok felelnek meg a feltételeknek, amelyek oszthatók 7-tel. Végtelen sok ilyen szám van. Ezek közül legkisebb az 1981.

Az 1981 megtalálásáért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 69%.

Megjegyezzük, hogy jó szám például az $1980 \cdot 8+1=15\,841$; az $1980 \cdot 15+1=29\,701$ is. Általában az $1980 \cdot (7k+1)+1$ alakú számokra igaz a feltétel.



3. Egy háromszög AB oldala 4 cm, AC oldala 6 cm és a $CAB\sphericalangle = 75°$. Szerkeszd meg az AB oldalon a D pontot és az AC oldalon az E pontot úgy, hogy $AE=ED=DB$ igaz legyen!

Megoldás:

Az $AE=ED=DB$ egyenlőség miatt az $AED\triangle$ és az $EDB\triangle$ is egyenlő szárú. Ezért az $ADE\sphericalangle = 75°$, az $EDB\sphericalangle = 105°$, a $DBE\sphericalangle = 37{,}5°$. Tehát az AB szakasz B pontjára mért — vagy szerkesztett — 37,5°-os szög szára kimetszi az AC oldalon a keresett E pontot. Az AE szakaszt B pontból AB-re mérve kaphatjuk meg a D pontot.

A jó megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 69%.

4. 1977-ben 44%-kal több autóra kötöttek CASCO biztosítást, mint 1975-ben. Az Állami Biztosító 1977-ben 1,72-szor akkora összegű kártérítést fizetett ki CASCO biztosításokra, mint 1975-ben. 1975-ben egy-egy kocsira átlagosan 820 Ft kártérítést fizetett. Mennyi volt ez az átlag 1977-ben?

Megoldás:

Ha csak a biztosított autók száma nő 44%-kal, akkor 1977-ben $\frac{820\text{ Ft}}{1{,}44}$ az átlagosan kifizetett kártérítés. Mivel a kifizetett kártérítés összege is változott 1,72-szorosára, ezért a keresett átlag $\frac{820 \cdot 1{,}72}{1{,}44}\text{ Ft} \approx 979\text{ Ft}$.

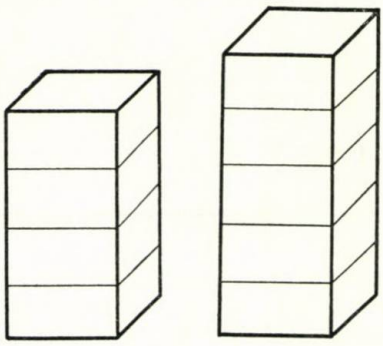
A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 87%.

5. Két egyenlő alapterületű négyzetes oszlop közül az egyiknek a felszíne 432 cm², a másiké 360 cm². Magasságuk hányadosa $\frac{5}{4}$. Számítsuk ki mindkét test térfogatát!

Megoldás:

A két test felszíne közötti különbség 72 cm². Ez a különbség a magasságuk aránya miatt a nagyobb test palástjának ötödrésze. Ezért a teljes palást 360 cm². Az alaplap területe [(432 − 360) : 2 =] 36 cm². Mindkét test alapéle 6 cm. A nagyobb test magassága [360 : (6 · 4) =] 15 cm, térfogata 540 cm³. A kisebb test magassága 12 cm, térfogata 432 cm³.

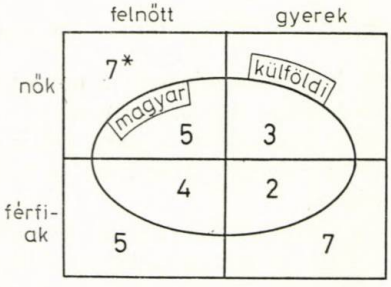


A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 70%.

A második napi feladatok

1. Egy repülőgépen 9 fiú, 5 magyar gyerek, 9 felnőtt férfi, 7 külföldi fiú, 14 magyar, 6 magyar férfi (beleértve a magyar fiúkat is) és 7 külföldi nő (beleértve a külföldi lányokat is) utazott. Hány utas volt a repülőgépen?



Megoldás:

A feladat megoldásában halmazábra segíthet. Pl. ilyen:

Mi mind a 7 külföldi nőt felnőttnek tekintettük.

A helyes megoldásért 4 pontot adtunk.

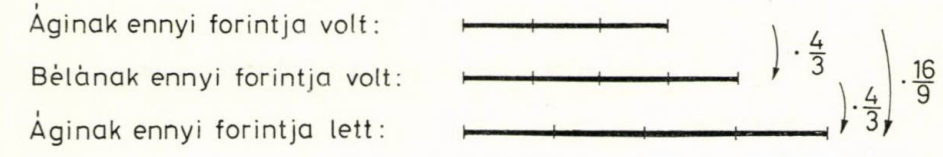
A tanulók teljesítménye 85%.

2. Ági megtakarított pénze $\frac{3}{4}$ része volt Béla pénzének. Ági gyűjtött hozzá, és ekkor Béla pénze lett $\frac{3}{4}$ része az ő pénzének. Hányszor annyi Ági pénze most, mint eredetileg volt?

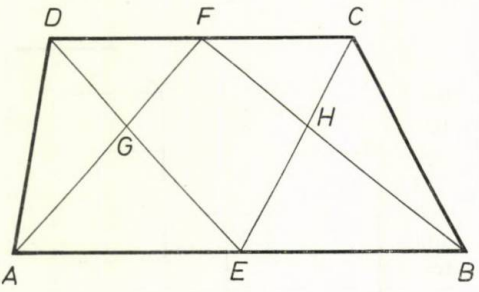
Megoldás:

Többen konkrét számokban gondolkodtak. Pl. Ha Áginak 9 Ft-ja volt, akkor Bélának 12 Ft-ja. A 12 Ft 16 Ft-nak a $\frac{3}{4}$ része. Tehát Ági még 7 Ft-ot gyűjtött, és így $\frac{16}{9}$-szer annyi pénze lett, mint amennyi előzőleg volt.

Az egyik versenyző a mennyiségeket szakaszokkal ábrázolta:



A helyes megoldásért 4 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 92%.



3. Az $ABCD$ trapéz AB oldalának felezőpontja E; CD oldalának felezőpontja F. Az AF és a DE egyenesek metszéspontja G, az EC és az FB egyenesek metszéspontja H. Igazold, hogy az AGD háromszög és a BCH háromszög területének összege ugyanannyi, mint az $EHFG$ négyszög területe!

Megoldás:
Az könnyen belátható, hogy az AED háromszög és az EBC háromszög területének összege egyenlő az ABF háromszög területével. Ha az AEG háromszög és az EBH háromszög területének összegét kivonjuk az AED háromszög és az EBC háromszög területének összegéből, akkor ugyanannyi marad, mint ha az ABF háromszög területéből vonjuk ki ugyanezt az összeget. Jelekkel:

$$t_{AED\triangle} + t_{EBC\triangle} = t_{ABF\triangle},$$

$$(t_{AED\triangle} + t_{EBC\triangle}) - (t_{AEG\triangle} + t_{EBH\triangle}) = t_{ABF\triangle} - (t_{AEG\triangle} + t_{EBH\triangle}).$$

A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 69%.

4. *A* városból *B* városba két motorkerékpáros indul el, az első 2 órával előbb, mint a második. Számítsuk ki a két város közötti távolságot, ha a következőket tudjuk:

— a motorkerékpárosok sebességének aránya: 2:3;
— sebességük különbsége: 20 km/óra;
— a második (a gyorsabb) motorkerékpáros negyedórával előbb érkezik meg *B* városba, mint az első.

Megoldás:
Mivel a két motorkerékpáros sebességének aránya 2:3, és a sebességük közötti különbség 20 km/óra, ezért az első (a lassúbb) sebessége 40 km/óra, a másodiké 60 km/óra. Tudjuk, hogy az első két órával előbb indult el és negyedórával később érkezett *B* városba, mint a második, ezért az első menetideje $\frac{9}{4}$ órával több, mint a másodiké. Ha a második menetideje t, akkor felírható a következő egyenlet:

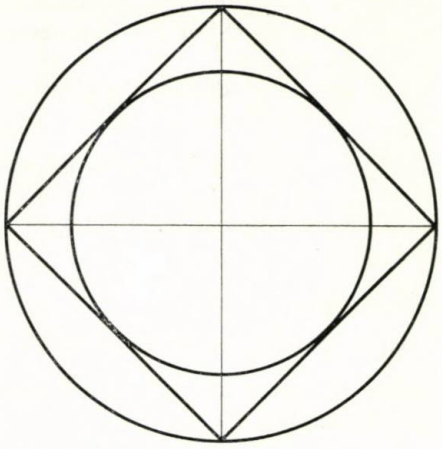
$$60t = 40\left(t + \frac{9}{4}\right); \quad \text{ebből} \quad t = 4{,}5.$$

A második menetideje 4 és fél óra, az elsőé 6 és háromnegyed óra.
A két város távolsága (60 km/óra · 4,5 óra =) 270 km.
A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 70%.

5. Egy körgyűrűbe úgy rajzoltunk egy négyzetet, hogy a négyzet mindegyik oldala a külső körnek húrja, a belső körnek pedig érintője. Számítsd ki a körgyűrű területét, ha a négyzet oldala 8 cm!

Megoldás:

Azok a tanulók, akik már az új matematika-tanterv szerint tanultak, előbb kiszámították Pitagorasz tételével a nagy kör sugarát. Akik az ideiglenes tanterv szerint tanultak, azok megszerkesztették a négyzetet, a két kört, és lemérték a külső kör sugarát.



A belső kör sugara 4 cm, a külső kör sugara $\sqrt{32}$ cm $\approx$ 5,7 cm. A belső kör területe: $16 \cdot 3{,}14\ \text{cm}^2 = 50{,}25\ \text{cm}^2$. A külső kör területe: $32 \cdot 3{,}14\ \text{cm}^2 = 100{,}48\ \text{cm}^2$, azaz kétszerese a belső kör területének. A körgyűrű területe ezért 50,24 cm².

A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 89%.

Általában is igaz az, hogy a négyzet beírt körének területe fele a négyzet köré írt kör területének, ezért a körgyűrű területe is fele a külső kör területének.

8. osztály

Az első napi feladatok

1. Megegyezik a 7. osztályosok 1. napi **1.** feladatával.

A tanulók teljesítménye 47%.

2. Összeszoroztam öt egymás után következő pozitív egész számot. Melyik az a legnagyobb szám, amellyel ez a szorzat biztosan osztható? Még mely számok lesznek biztosan osztói?

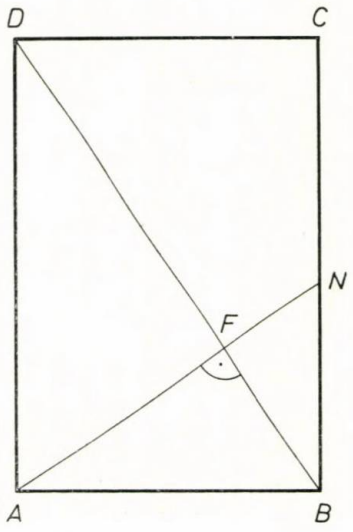
Megoldás:

Az öt pozitív egész szám közül legalább kettő páros, a párosak közül legalább az egyik néggyel is osztható, legalább egy osztható hárommal, és biztos, hogy az egyik osztható 5-tel. Ezért az öt, egymás után következő pozitív egész szám szorzatának törzstényezős alakjában biztosan előfordul a $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ szorzat. Tehát az öt, egymás után következő pozitív egész szám szorzata biztosan osztható 120-szal, és biztosan osztható 120 osztóival is. Ezek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 62%.

3. Az *ABCD* **téglalap** *A* csúcsából a *BD* átlóra bocsátott merőleges talppontját jelöljük *F*-fel! Az *AF* egyenes a *BC* oldalt az *N* pontban metszi. Szerkesszük meg a téglalapot, ha $AF = 9$ cm és $NF = 4$ cm!



Megoldás:

Először — Thalész-tétel segítségével — az *ABN* derékszögű háromszöget szerkesztjük meg. Az *ABN* háromszög *B* csúcsából induló magasságegyenesé-

nek és az A csúcsban az AB oldalra emelt merőlegesnek metszéspontja lesz a téglalap D csúcsa. A D-ből BN egyenesre bocsátott merőleges talppontja lesz a téglalap C csúcsa.

A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 62%.

4. Egy 60 km/h sebességgel haladó személygépkocsi 9 óra 50 perckor érkezik céljához, míg egy 40 km/óra sebességgel ugyanazon az útvonalon haladó tehergépkocsi 10 óra 15 perckor. A cél előtt hány kilométerrel előzte meg a személyautó a teherautót?

Megoldás:

A két jármű célba érkezése közötti időkülönbség 25 perc, azaz $\frac{5}{12}$ óra. Ha a találkozásuk helyének és a célnak a távolságát x-szel jelöljük, akkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$\frac{x}{40}-\frac{x}{60}=\frac{5}{12}$. Ebből $x=50$. Tehát a cél előtt 50 km-rel előzte meg a személyautó a teherautót.

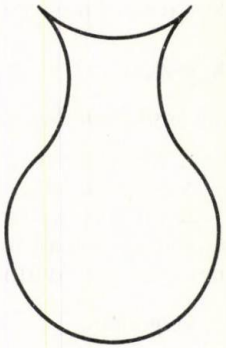
A helyes megoldásért 5 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 85%.

5. Ennek az alakzatnak a határoló vonalait 1,5 cm-es sugarú körnek egyenlő hosszúságú íveiből alakítottuk ki.

a) Számítsd ki az alakzat területét!

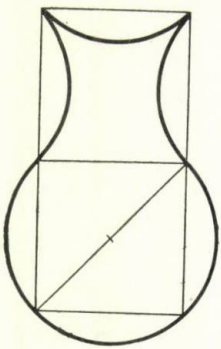
b) Mekkora a területe a 2,5 cm sugarú körívekből készített hasonló síkidomnak?



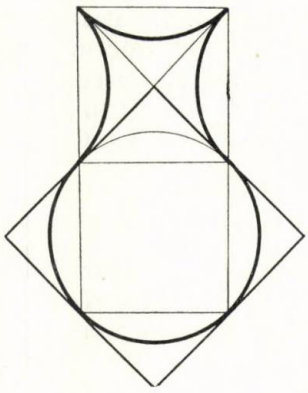
Megoldás:

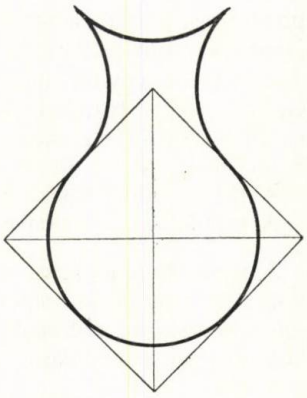
A tanulók a kancsóhoz hasonló alakzatot téglalappá, illetve négyzetté darabolták át.

Így:



vagy így:





Az első rajzon a téglalap rövidebbik oldala legyen a, akkor a hosszabb oldala $2a$, és területe $2a^2$. A kör átmérője 3 cm, ezért Pithagorasz tételét felhasználva felírhatjuk a következőt: $a^2+a^2=3^2$; $2a^2=9$, és ez éppen a téglalap keresett területének mérőszáma. Tehát az alakzat területe 9 cm^2.

A második rajzon a „kancsó" olyan négyzetté lett átdarabolva, amelyiknek az oldala megegyezik a kör átmérőjével, 3 cm-rel. Területe tehát 9 cm².

Ha a kör sugara 2,5 cm, akkor az előzőekhez hasonló okoskodással azt kapjuk, hogy az alakzat területe 25 cm².

A feladat helyes megoldásáért 8 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 89%.

A második napi feladatok

1. Megegyezik a 7. osztályosok 2. napi **1.** feladatával.

A tanulók teljesítménye 96%.

2. Egy városban három általános iskola van. Az 1. számú iskolában 70-nel több tanuló jár, mint a 2. számúba járók $\frac{2}{3}$ része, és 140-nel kevesebb, mint amennyi a 3. számú iskolába jár. A harmadik iskolában 128 tanulóval kevesebb van, mint az 1. számú iskolába járók $\frac{7}{5}$ része. Hány általános iskolás van ebben a városban?

Megoldás:

Ha a második iskolába x tanuló jár, akkor az elsőbe $\left(\frac{2}{3}x+70\right)$ tanuló, és a harmadikba $\frac{7}{5}\left(\frac{2}{3}x+70\right)-128$ tanuló.

A következő egyenlet írható fel:

$$\frac{2}{3}x+70+140=\frac{7}{5}\left(\frac{2}{3}x+70\right)-128,$$

ebből

$$x=900.$$

Az első iskolába 670 tanuló, a másodikba 900 tanuló, a harmadikba 810 tanuló jár. A városban összesen 2380 általános iskolás tanuló van.

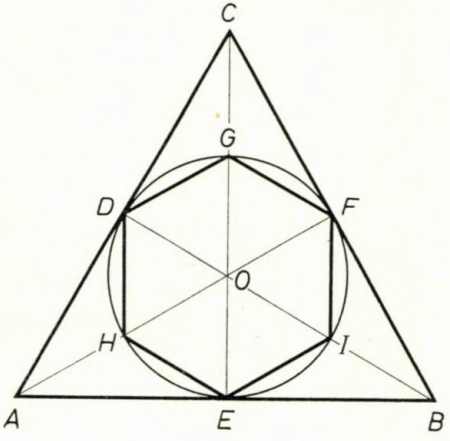
A feladat helyes megoldásáért 6 pontot adtunk.

A tanulók teljesítménye 76%.

3. Egy kör köré szabályos háromszöget, a kör belsejébe szabályos hatszöget szerkesztettünk. Hányszorosa a kör köré írt szabályos háromszög területe az ugyanabba a körbe írt szabályos hatszög területének?

Megoldás:

Az ábrán látható AOE háromszög olyan derékszögű háromszög, amelyikben az AO átfogó kétszerese az EO befogónak (mert egyik hegyesszöge 60°, a másik 30°). A HOE háromszög területe megegyezik az AHE háromszög területével, mert H az AO szakasz felezőpontja. A szabályos hatszög területe a HOE háromszög területének hatszorosa; a szabályos háromszög területe pedig a HOE háromszög területének tizenkétszerese. Tehát a kör köré írt szabályos háromszög területe kétszerese a körbe írt szabályos hatszög területének.



A feladat helyes megoldásáért 4 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 71%.

4. Egy útvonal A, B, C pontjából ugyanabban az időpontban és ugyanabban az irányban három jármű indul. A B pont az A és C pont között van, mindkettőtől azonos távolságra. Az A pontból induló jármű a B pontból indulót 2 óra múlva éri utol, míg a B pontból induló a C pontból indulót 3 óra múlva. Mennyi idő múlva éri utol az A pontból induló jármű a C pontból indulót?

Megoldás:

Vizsgáljuk azt az időpontot, amikor az A pontból induló jármű utoléri a B pontból indulót! Ekkor az A pontból induló jármű hátránya 0-ra csökkent a B-ből indulóéhoz képest, míg a B pontból indulóé a C-ből indulóéhoz képest az eredeti hátrány harmadrészére, azaz az AC távolság hatodrészére. Ez azonban azt jelenti, hogy két óra elteltével az A pontból induló jármű hátránya a kezdeti AC távolságról annak hatodrészére csökkent a C-ből indulóéhoz képest. A csökkenés tehát az eredeti hátrány $\frac{5}{6}$ része. Ha ehhez 2 órára volt szükség, akkor a teljes hátrány behozásához $\frac{6}{5} \cdot 2$ óra $\left(=2+\frac{2}{5}\right)$ óra szükséges. Ennélfogva az A pontból induló jármű $\left(2+\frac{2}{5}\right)$ óra múlva éri utol a C pontból indulót.

A feladat helyes megoldásáért 6 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 68%.

5. Egy gömb és egy egyenes kúp térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint 128:27. A kúp magassága megegyezik az alaplapjának átmérőjével. Hány centiméter lehet a kúp alapkörének, illetve a gömbnek a sugara, ha mindkettőnek mérőszáma 10-nél kisebb természetes szám?

Megoldás:

Legyen a gömb sugara R cm, a kúp alapkörének sugara r cm. Akkor a gömb térfogata $\frac{4R^3\pi}{3}$; a kúp térfogata $\frac{2r^3\pi}{3}$.

Térfogatuk aránya:

$$\frac{4R^3\pi}{3} : \frac{2r^3\pi}{3} = \frac{2R^3}{r^3}.$$

A feladat feltétele szerint:

$$\frac{2R^3}{r^3} = \frac{128}{27}.$$

Ebből

$$\frac{R}{r} = \frac{4}{3}.$$

Mivel mindkét test sugarának mérőszáma 10-nél kisebb természetes szám, ezért a feladatnak két megoldása van. A gömb sugara lehet 8 cm és akkor a kúp sugara 6 cm, vagy a gömb sugara 4 cm és a kúp sugara 3 cm.

A helyes megoldásért 6 pontot adtunk.
A tanulók teljesítménye 68%.

A vetélkedő első 6 helyezettje:

7. osztály

1. **Bóna Miklós**
   Székesfehérvár, Vörös Hadsereg úti Általános Iskola
2. **Péter Oszkár**
   Győr, Lenin úti Általános Iskola
3. **Nyilas István**
   Nyíregyháza, Bessenyei György Tanárképző Főiskola
   II. Gyakorló Általános Iskola
4. **Leitereg András**
   Szentendre, Felszabadulás lakótelepi Általános Iskola
5. **Szikra László**
   Mór, Somogyi Béla úti Általános Iskola
6. **Antal Péter**
   Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem
   Gyakorló Általános Iskola

8. osztály

1. **Megyeri Gábor**
   Szeged, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola
   Gyakorló Általános Iskola
2. **Kriván Miklós**
   Győr, Vágóhíd úti Általános Iskola
3. **Babka Ildikó**
   Nyíregyháza, Bessenyei György Tanárképző Főiskola
   II. Gyakorló Általános Iskola
4. **Balogh Pál**
   Százhalombatta, I. sz. Általános Iskola
5. **Szerdahelyi Andor**
   Kecskemét, Kodály Zoltán Általános Iskola
6. **Paál Beatrix**
   Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

RÁCZ JÁNOS
vezető tanár
Budapest

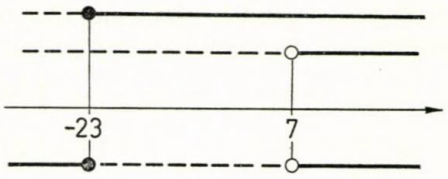
Néhány feladat és megoldása ürügyén

(Megjegyzések az értékkészlet tanításáról) (2. rész)

9. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(18) \qquad x+23+12\sqrt{\frac{x+23}{x-7}-\frac{160}{x-7}} \leqq 0.$$

Az egyenlet bal oldalán szereplő gyök alatti törtkifejezés előjelét az 5. ábrán szemléltettük.



5. ábra

A (18) egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés tehát a következő esetben van értelmezve:

$$x > 7 \vee x \leqq -23.$$

Válasszuk külön a két esetet.

a) $x>7$. Szorozzuk meg (18) mindkét oldalát $(x-7)$-tel (ami pozitív) és használjuk fel, hogy ebben az esetben $x-7=\sqrt{(x-7)^2}$:

$$(x+23)\cdot(x-7)+12\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-160 \leqq 0. \tag{19}$$

A (19) bal oldalán álló kifejezés $\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}$-re másodfokú polinom, a zérushelyei: $\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}=-6\pm 14$. A kifejezést szorzattá alakítva (19)-ből ezt kapjuk:

$$\left(\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-8\right)\cdot\left(\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}+20\right) \leqq 0.$$

A bal oldal második tényezője a teljes értelmezési tartományban pozitív, így elég megoldani a

$$\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-8 \leqq 0 \tag{20}$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk meg (20) mindkét oldalát az értelmezési tartományban pozitív $\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}+8$ kifejezéssel, majd rendezzük a kapott egyenlőtlenséget:

$$x^2+16x-225 \leqq 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva ezt kapjuk:

$$(x-9)\cdot(x+25) \leqq 0.$$

A bal oldal második tényezője az $x>7$ esetben pozitív, tehát csak $x-9\leqq 0$ lehet, ekkor a megoldás:

$$7 < x \leqq 9.$$

b) $x\leqq -23$. Szorozzuk meg (18) mindkét oldalát most is $(x-7)$-tel, de most $x-7<0$, ezért $x-7=-\sqrt{(x-7)^2}$ és az egyenlőtlenség jele megfordul:

$$(x+23)\cdot(x-7)-12\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-160 \geqq 0.$$

Újra $\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}$-re másodfokú egyenlőtlenséget kaptunk, a bal oldalt szorzattá alakítva:

$$\left(\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-20\right)\cdot\left(\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}+8\right) \geqq 0.$$

A második tényező itt pozitív, tehát elég megoldani a

$$\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}-20 \geqq 0 \tag{21}$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk meg (21) mindkét oldalát a pozitív $\sqrt{(x+23)\cdot(x-7)}+20$ kifejezéssel, majd rendezzük az így kapott egyenlőtlenséget:

$$x^2+16x-561 \geqq 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva ezt kapjuk:

$$(x+33)\cdot(x-17) \geqq 0.$$

Itt a bal oldal második tényezője az $x \leqq -23$ esetben negatív, tehát csak $x+33 \leqq 0$ állhat fenn, azaz $x \leqq -33$.

A (18) egyenlőtlenség megoldása tehát:

$$x \leqq -33 \vee 7 < x \leqq 9.$$

Ez a feladattípus nagyon alkalmas a „gyökjel alá való bevitel" világos megtanítására. Egy pillanatra sem szabad elfelejtenünk, hogy diákjainkban csak az az anyagrész élhet, amelyet feladatokon keresztül megismertek. Ebben a feladatban alapvető szerepet játszott, hogy az értelmezési tartomány egyik szakaszában $x-7=\sqrt{(x-7)^2}$ áll fenn, míg a másik intervallumban $x-7=-\sqrt{(x-7)^2}$.

A gimnáziumi II. osztályos matematika-tankönyv (R. sz. 13 202) kis lexikonjában szerepel a következő azonosság:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \quad \text{ha} \quad a \geqq 0;\ b \geqq 0.$$

Ez a feladat is azt mutatja, hogy $a\sqrt{b}$-nek akkor is van értelme, ha $a<0$ (természetesen csak $b \geqq 0$ mellett), így a helyes azonosság:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \quad \text{ha} \quad a \geqq 0 \wedge q \geqq 0,$$

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}, \quad \text{ha} \quad a < 0 \wedge b \geqq 0.$$

10. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása is csak akkor válhat aktív ismeretté tanítványainkban, ha feladatban találkoznak vele, ha valóban vizsgálni kell konkrét esetekben a szigorú monotonitást.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{x+2}{5}\right|^{x^2+x-20} \leqq 1. \tag{22}$$

A feladat megoldása előtt célszerű felidézni az exponenciális függvényről tanultakat. Az $x \mapsto a^x$ függvényt a következő esetekben vizsgáljuk:

$a<0$ esetén csak egész x-re értelmeztük, exponenciális egyenletek megoldásakor ezt az esetet kizárjuk;

$a=0$ esetén pozitív x-re $0^x=1$,
negatív x-re és 0-ra nem értelmezzük ($x=0$-ra néha szokás megállapodni abban, hogy $0^0=1$, lásd pl. Kalmár László: A matematika alapjai (egyetemi jegyzet));

$a=1$ esetén $1^x=1$ minden valós x-re;

$0<a<1$ esetén a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton fogy;

$1<a$ esetén a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton nő.

A (22) egyenlőtlenség bal oldalán az alap nemnegatív, $x=-2$-re nulla, ekkor a kitevő negatív, így a bal oldalnak nincs értelme. Minden más x-re a kifejezés értelmezve van.

Ha $x=3 \vee x=-7$, akkor az alap 1. Ekkor a bal oldal értéke — a kitevőtől függetlenül — 1, tehát ezek megoldásai az egyenlőtlenségnek.

Ha $-7<x<3 \wedge x \neq -2$, akkor az alap a $]0; 1[$ intervallumban van. Itt az exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, ezért (22) akkor és csak akkor igaz, ha a kitevő:

$$x^2+x-20 \geqq 0, \quad \text{azaz}$$

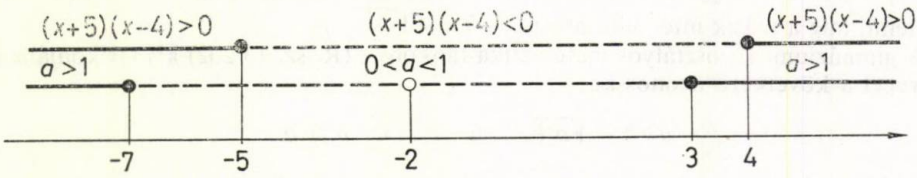
$$(x+5)\cdot(x-4) \geqq 0.$$

Ha $x<-7 \vee x>3$, akkor az alap 1-nél nagyobb. Itt az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, tehát (22) akkor és csak akkor igaz, ha

$$x^2+x-20 \leqq 0, \quad \text{azaz}$$

$$(x+5)\cdot(x-4) \leqq 0.$$

Az egyenlőtlenségek megoldását a 6. ábráról olvashatjuk le:



6. ábra

A megoldás tehát: $-7 \leqq x \leqq -5 \vee 3 \leqq x \leqq 4$.

11. Oldjuk meg az

(23) $$\frac{\log_a z}{\log_a y} \leqq 1$$

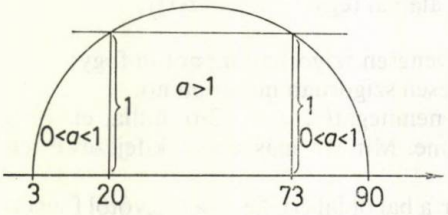
egyenlőtlenséget, ahol

$$a=\frac{(x-3)\cdot(90-x)}{1190}; \quad y=\frac{x-2}{39}; \quad z=\frac{x^2+2336}{112\cdot 39}.$$

Itt is célszerű felidézni a logaritmusfüggvényről tanultakat. A valós számok körében csak pozitív számok logaritmusát értelmeztük, pozitív és 1-től különböző alap esetén, tehát:

$$y>0 \wedge z>0 \wedge a>0 \wedge a \neq 1.$$

Ha $0<a<1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogy, ha $a>1$, akkor szigorúan monoton nő.



7. ábra

A definícióból világos, hogy z minden x-re pozitív, y pozitív, ha $x>2$ és $a>0$, ha $3<x<90$.

Állapítsuk meg, mely x értékekre lesz $a=1$. Ez nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(x-3)\cdot(90-x)=1190,$$

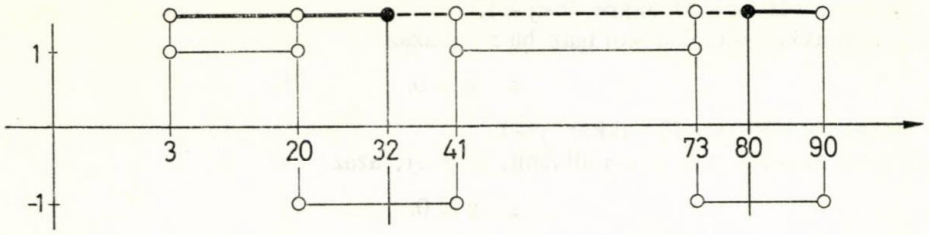
ahonnan $x=20$, $x=73$. A 7. ábrán az $x \mapsto a$ függvény képét vázoltuk a $]3; 90[$ intervallumban.

Az ábráról leolvasható, hogy

$0<a<1$ teljesül, ha $3<x<20 \vee 73<x<90$,

$1<a$ teljesül, ha $20<x<73$.

Érdemes vázolni az $y \mapsto \operatorname{sgn} \log_a y$ függvény képét is (8. ábra).



8. ábra

A (23) bal oldalán álló kifejezés értelmezési tartománya tehát:

$$3 < x < 90 \wedge x \neq 20 \wedge x \neq 41 \wedge x \neq 73.$$

A folytatást kétféle módszerrel is bemutatjuk.

a) (23) mindkét oldalát $\log_a y$-nal szorozzuk, közben figyelembe vesszük az előjelét is. A $]3; 20[$ intervallumban $\log_a y > 0$, így (23)-ból

$$\log_a z \leqq \log_a y \tag{24}$$

adódik és mivel itt $0 < a < 1$, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogy, ezért (24)-ből $z \leqq y$, azaz

$$z - y \geqq 0$$

adódik.

A $]20; 41[$ intervallumban $\log_a y < 0$, tehát (23)-ból

$$\log_a z \geqq \log_a y,$$

itt $a > 1$, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért $z \geqq y$, azaz

$$z - y \geqq 0.$$

A $]41; 73[$ intervallumban $\log_a y > 0$, így (23)-ból

$$\log_a z \leqq \log_a y,$$

ebben az intervallumban $a > 1$, a logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogy, tehát $z \leqq y$, azaz

$$z - y \leqq 0.$$

Végül a $]73; 90[$ intervallumban $\log_a y < 0$, tehát (23)-ból

$$\log_a z \geqq \log_a y,$$

itt $0 < a < 1$, a logaritmusfüggvény tehát szigorúan monoton csökken, ezért $z \leqq y$, azaz

$$z - y \leqq 0.$$

b) Felhasználhatjuk, hogy a teljes értelmezési tartományban

$$\frac{\log_a z}{\log_a y} = \log_y z,$$

így (23) ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\log_y z \leqq 1. \tag{25}$$

Ha $3<x<41 \wedge x \neq 20$, akkor $0<y<1$.
(25) tehát akkor és csak akkor igaz, ha $z \geqq y$, azaz

$$z - y \geqq 0.$$

Ha $41<x<90 \wedge x \neq 73$, akkor $y>1$.
(25) tehát akkor és csak akkor áll fenn, ha $z \leqq y$, azaz

$$z - y \leqq 0.$$

Akár az *a)*, akár a *b)* úton jutottunk el idáig, innen a következőképpen folytathatjuk. A definíciókból:

$$z - y = \frac{x^2 - 112x + 2560}{112 \cdot 39}.$$

A számláló zérushelyei: 32 és 80, tehát

$$z - y = \frac{(x-32)(x-80)}{112 \cdot 39}.$$

Innen a megoldás már leolvasható:

$$(3 < x \leqq 32 \wedge x \neq 20) \vee (41 < x \leqq 80 \wedge x \neq 73).$$

12. Végül egy ismert feladattípus egy konkrét változatát vizsgáljuk:
A k milyen értéke mellett lesz az

$$x^2 - (3k-11)x + 2k^2 - 19k + 40 = 0 \tag{26}$$

egyenletben a valós gyökök négyzetének összege minimális?

A problémát az okozza, hogy minden $x^2+px+q=0$ alakú másodfokú egyenlet x_1 és x_2 (akár valós, akár komplex) gyökére teljesül, hogy

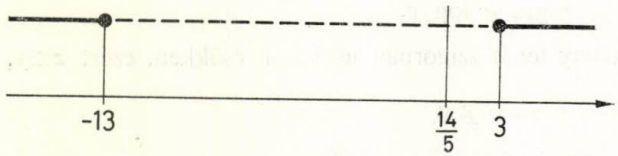
$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

Ha ez az érték negatív, akkor szinte kiabál, hogy valami nincs rendben. Ezért ezt a feladatot is az értelmezési tartomány megállapításával célszerű kezdeni. A (26) egyenletnek akkor és csak akkor van valós gyöke, ha a diszkriminánsa nem negatív:

$$(3k-11)^2 - 4 \cdot (2k^2 - 19k + 40) \geqq 0.$$

Ebből rendezéssel ezt kapjuk:

$$k^2 + 10k - 39 = (k+13) \cdot (k-3) \geqq 0.$$



9. ábra

A (26) egyenletnek tehát $k \leqq -13 \vee k \geqq 3$ esetén van valós gyöke. A (26) egyenlet gyökei négyzetének összege:

$$(3k-11)^2 - 2 \cdot (2k^2 - 19k + 40) =$$

$$= 5k^2 - 28k + 41 = 5 \cdot \left(k - \frac{14}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}.$$

Mivel a kapott, k-ra másodfokú polinom abszolút minimumhelye $\left(\frac{14}{5}\right)$ nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért a minimum értékét az ehhez a helyhez legközelebb eső, értelmezési tartományba tartozó értékre, azaz $k=3$-ra veszi fel. Valóban, $k=3$-ra a (26) egyenlet így alakul:

$$(x^2-2x+1) = (x-1)^2 = 0,$$

és a gyökök négyzetének összege 2.

A matematikatanítás MÓDSZERE

DR. CSIRMAZ LÁSZLÓ—DR. SIMONOVITS MIKLÓS
tudományos munkatárs egyetemi docens
Budapest

Algoritmusok I.

Bevezetés

Korunk matematikájában az algoritmusok elméletének jelentősége ugrásszerűen megnőtt. Ennek durván két oka volt. Az egyik a halmazelmélet és matematikai logika kifejlődése. Megjelenik például a Turing gép fogalma, illetve a rekurzív függvények elmélete, és természetesen vetődik fel a kérdés, mi számítható ki Turing gépen (ami tulajdonképpen egy „matematikai" számítógép), mely függvények rekurzívak, melyek nem, ... Ugyanekkor, pontosabban néhány évvel később megjelennek az elektronikus számítógépek is. Valahányszor ezekkel egy feladatot szeretnénk megoldani, arra megfelelő algoritmust kell terveznünk.

Mi is az, hogy ALGORITMUS? Az algoritmus a matematikában — durván szólva — egy nagyon pontosan leírt kiszámítási vagy eldöntési eljárás. Nemcsak matematikában használunk algoritmusokat: algoritmusnak tekinthető egy főzési recept, egy fényképészeti eljárás leírása, egy számítógéppel vagy egyébként (mechanikailag) automatizált számgép „beidomítása", ... Mi itt csak matematikai algoritmusokra szorítkozunk.

Két megjegyzéssel kezdjük:

a) Modernebb oktatási kísérleteinkben egyik jogos követelmény, hogy amennyiben régi és új matematika között választhatunk, és az új matematika oktatása ugyanazokkal a hasznokkal jár, mint a régié: szép és hasznos matematikai ismeretekkel lát el és gondolkodni tanít, akkor az újat válasszuk. Ebből a szempontból igen hasznos területe a modern matematikának az algoritmusok elmélete.

b) Második megjegyzésünk csak annyi, hogy a témakörből, habár nincs túl sok magyar nyelvű irodalom, igen melegen ajánlhatjuk a következő könyveket:

1. Lovász—Gács: *Algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, 1978.;
2. Aho—Hopcroft—Ullmann: *Számítógép-algoritmusok tervezése és analízise.* Műszaki Könyvkiadó, 1982.;

3. Lawler: *Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok.* Műszaki Könyvkiadó (megjelenés alatt);
4. B. A. Trachtenbrot: *Algoritmusok és absztrakt automaták.* Műszaki Könyvkiadó, 1978.

Térjünk vissza az eredeti kérdésre: MI AZ ALGORITMUS? Ha egy ember kezd el valamit kiszámítani, gyakran menetközben esetleges, véletlenszerű dolgokat csinál. Észrevesz valamilyen szabályosságot az adatok között, ezért leegyszerűsíti az eredetileg tervezett eljárást, vagy két lehetséges eljárás közül egy adott ponton hangulatára támaszkodva választja ki egyiket vagy másikat. Nehezebb a helyzet, ha nem mi akarunk kiszámítani valamit, hanem egy matematikailag nem túlságosan jól képzett emberrel akarjuk elvégeztetni a számításokat. Ilyenkor alaposabban át kell gondolnunk magát az eljárást, majd pontosan megfogalmazni, leírni. Minél képzetlenebb az illető, annál nagyobb gonddal kell elkészítenünk a leírást. Amennyiben egy géppel akarjuk a munkát elvégeztetni, a kívánatos pontosság még tovább fokozódik. Ilyenkor az eljárást egészen apró lépésekre kell bontani, és valahányszor egy részeredménytől függő döntést hozunk, azt különösen világosan kell megfogalmaznunk, mi szerint döntünk így vagy úgy. Ez az algoritmus „definíciója", és habár ez nem teljesen matematikai, mégis a következőkben teljesen kielégítő lesz.

Ha az algoritmusra pontos matematikai definíciót kívánnánk adni, előbb definiálnánk a matematikai számítógép fogalmát, majd egy erre írt (szintaktikusan helyes) programot neveznénk algoritmusnak. Maga a matematikai számítógép abban szokott különbözni a valóságos számítógépektől, hogy egyrészt a programozási nyelve lényegesen kevesebb utasítást tartalmaz, mint a valódi gépeké, másrészt akármilyen hosszú programot és akármennyi adatot elhelyezhetünk benne —a gép memóriáját végtelennek képzeljük.

A hagyományos középiskolai tananyagban is nagyon sok matematikai algoritmussal találkozhatunk: a szögfelező megszerkesztése, adott körbe szabályos ötszög szerkesztése, egy másodfokú egyenlet megoldása a gyökképlet alapján, ... ezek tulajdonképpen mind számítási vagy szerkesztési eljárások, algoritmusok. A most következő algoritmusok inkább mennyiségileg, mint minőségileg különböztethetőek meg a megelőzőektől: lényegesen bonyolultabb és hosszadalmasabb eljárásokat írnak le. Ezekben a meglehetősen hosszú, néha több millió lépéses algoritmusokban szükségképpen fellép egy közös új vonás: sok hasonló, lényegében egyforma lépés ismételt végrehajtása. Más szóval, ugyanazt a lépést hajtjuk végre más és más adatokkal, újra és újra. Ennek az ismételgetős jellegnek elterjedését algoritmusainkban alapjában két okkal magyarázhatjuk.

a) Ha egy egymillió lépéses algoritmus ezer különböző lépésből állna, akkor igen nehéz volna leírni is, elolvasni is, számítógépre beprogramozni is, majd a programozási hibákat kijavítani a programban.

b) Ha egy algoritmus több millió olyan lépésből áll, melyek alakilag egyformák, csak különböző adatokra vonatkoznak, akkor ennek megvalósítása a mai modern számítógépeken nem okoz különösebb gondot.

Egy számelméleti algoritmus

A feladat. Adott egy n természetes szám és szeretnénk eldönteni, hogy prímszám-e vagy sem. Amennyiben nem prímszám, keressük prímfelbontását.

Ez a kérdés több szempontból is igen fontos, bővebb irodalom található a témakörről például *Babai László* cikkében: *Prímszámok és titkosírás* (Természet Világa, 1981. június). Mi itt nem szeretnénk a feladat mélyebb elméleti tárgyalásába belemenni, inkább egy egyszerű eljárást mutatunk be, amelyik aránylag kis számokra jól használható és „pedagógiai szempontból hasznos".

Megoldás. Visszavezetjük a fenti feladatot arra a kérdésre: n prím-e, és ha

nem, adjuk meg a legkisebb osztóját. Ha az utóbbi feladatot meg tudjuk oldani, azzal az előbbit is megoldottuk.

Tudjuk, hogy n legkisebb osztója $\sqrt{n}$ alatt van. Ezért algoritmusunk így szól:

(i) Vizsgáljuk meg, hogy n páros-e! Ha igen, akkor vagy $n=2$, amikor prím, vagy $n\neq 2$, amikor 2 a legkisebb prímosztója. Tegyük most fel, hogy n páratlan!

(ii) Osszuk el n-et egy k páratlan számmal, ahol k eredetileg 3, de azután minden lépésben 2-vel nő, míg $\sqrt{n}$-et el nem éri! Ha valamelyik k-ra n osztható k-val, az algoritmust megállítjuk és megkaptuk n legkisebb prímosztóját. Ha pedig k nem osztja n-et, akkor, ahogyan azt már feljebb megfogalmaztuk, k-t $(k+2)$-re növeljük, és amennyiben $k+2$ nagyobb $\sqrt{n}$-nél, megállunk azzal az eredménnyel, hogy n prím, egyébként $(k+2)$-vel osztunk stb."

Miután egy algoritmust leírtunk (=definiáltunk), általában két további feladatunk marad.

(i) Megvizsgálni, hogy az algoritmus valóban azt teszi-e, amire terveztük.

(ii) Megvizsgálni, milyen gyors az algoritmus: alkalmas-e arra, hogy a gyakorlatban is felhasználjuk.

A fenti algoritmusnál világos, hogy valóban a szám legkisebb osztóját találja meg.

Gyorsaságáról a következő mondható el:

Ahhoz, hogy egy n számról eldöntsük, mi a legkisebb prímosztója, legrosszabb esetben $\sqrt{n}$-ig az összes páratlan számot végig kell vizsgálnunk, ami $\sqrt{n}/2$ lépést jelent. Ez egy 10^6 alatti számnál 500 lépést jelent, ami középiskolás gyakorlatban kézi megoldásra ugyan nem alkalmas, de a legtöbb programozható kis kalkulátoron elvégezhető. A gyakorlatban felmerül azonban 120 jegyű, azaz 10^{120} nagyságrendű számok prímtesztelésének igénye is, amihez a fenti algoritmusnak 10^{60} nagyságrendű lépésre van szüksége. Ha olyan számítógépeket alkalmazunk, melyek másodpercenként 10^7 lépést tudnak elvégezni, akkor is nagyságrendben 10^{46} évre van szükségünk, hiszen egy év kb. $3\cdot 10^7$ másodperc, azaz évente kb. $3\cdot 10^{14}$ műveletet végzünk csak. Ez azt mutatja, hogy a feladat ezen az úton nem oldható meg.

Felvetődik a következő kérdés: vajon mennyi időt csaltunk le azzal, hogy n prímfelbontása helyett csak a legkisebb prímosztóját kerestük meg. Erre becslésként $\sqrt{n}/2$ lépést kaptunk, és világos, hogy a teljes prímfelbontást is megkaphatjuk $\frac{1}{2}\sqrt{n}\cdot\log n$ lépésben, hiszen ha kiderül, hogy n nem prím, hanem p a legkisebb prímosztója, akkor n/p-re alkalmazva az előző eljárást legfeljebb $\sqrt{n}/2$ lépést igényel az eljárásunk, ..., és minden prímosztó megtalálása után az előző szám helyett egy legfeljebb fele akkora számra kell alkalmazni az eljárást. Ez legfeljebb $\log_2 n$-szer ismétlődhet meg, utána lefogy a számunk.

A fenti becslésben persze túl bőkezűek voltunk. A j-edik prím megtalálása utáni n_j számunk, melynek legkisebb prímosztóját meg kell találni, legfeljebb $n/2^j$. Így a szükséges idő legfeljebb

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{4}}+\ldots\right)=$$

$$=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{2}}=1{,}7\sqrt{n}.$$

A különbség azonban abban az értelemben nem jelentős a fenti „lusta" becslés és a mostani „geometriai soros" között, hogy sem egyik, sem másik nem okoz döntő különbséget a nagyon nagy számok felbontásánál.

Négyzetgyökvonás, köbgyökvonás Newton módszerével

Az alábbiakban egy olyan zsebszámítógépet képzelünk magunk elé, amelyik osztani, szorozni, összeadni és kivonni tud, de például négyzetgyököt vonni nem. Szeretnénk vele négyzetgyököt vonni. Erre van egy algoritmus, melyet régebben tanítottak a középiskolában, és van egy ún. Newton-féle algoritmus is, melyet most fogunk ismertetni.

Az algoritmus: Feltesszük az egyszerűség kedvéért, hogy a szám A, melyből gyököt akarunk vonni, 1-nél nagyobb. Egyre jobb és jobb felső becsléseket fogunk adni $\sqrt{A}$-ra. Ha az n-edik közelítést x_n-nel jelöljük, a következőt az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \tag{1}$$

képlet alapján kapjuk. A képlet heurisztikus tartalma a következő: ha x_n egy kicsivel $\sqrt{A}$ felett van, akkor A/x_n körülbelül ugyanennyivel lesz $\sqrt{A}$ alatt, így a számtani közepük nagyon közel lesz $\sqrt{A}$-hoz. Próbáljuk meg ezt a gondolatot pontossá tenni.

Tegyük fel, hogy x_n hibája h_n, azaz $x_n = \sqrt{A} + h_n$. Ekkor

$$\frac{A}{x_n} = \frac{A}{\sqrt{A}+h_n} = \frac{A-h_n^2}{\sqrt{A}+h_n} + \frac{h_n^2}{\sqrt{A}+h_n} = \sqrt{A} - h_n + \frac{h_n^2}{\sqrt{A}+h_n}. \tag{2}$$

Itt a $\dfrac{h_n^2}{\sqrt{A}+h_n}$ tagot felülről becsülhetjük akár h_n-nel (azaz, elhanyagolva a nevezőben $\sqrt{A}$-t), akár h_n^2-tel is: $\sqrt{A}+h_n$-et alulbecsülve 1-gyel. Így (2) mutatja, hogy kis h_n esetén A/x_n valóban körülbelül annyival kisebb $\sqrt{A}$-nál, amennyivel x_n nagyobb: a heurisztika ezen része jó. Számoljuk ki az $(n+1)$-edik hibát:

$$\begin{aligned} h_{n+1} := x_{n+1} - \sqrt{A} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{A} + h_n + \frac{A}{\sqrt{A}+h_n}\right) - \sqrt{A} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{A} + h_n + \sqrt{A} - h_n + \frac{h_n^2}{\sqrt{A}+h_n}\right) - \sqrt{A} = \frac{h_n^2}{2(\sqrt{A}+h_n)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ebből, mint már láttuk, $h_{n+1} > 0$ és

$$h_{n+1} \leqq \frac{1}{2} h_n, \quad h_{n+1} \leqq \frac{1}{2} h_n^2. \tag{4}$$

Ezért a hiba tetszőleges x_0 esetén minden lépésben legalább a felére csökken, majd, ha már 1 alá süllyedt, akkor ennél jobb becslés is adható: minden lépésben az előző hiba négyzetének fele alá esik. Ha például csak annyit tudunk, hogy az első lépésben a hiba kb. 1000 volt, akkor 10 lépéssel később 1 alatt lesz, majd lépésenként elmondhatjuk, hogy 1/2 alá süllyed, majd 1/8 alá, majd 1/128-ad alá, majd 1/32 768 alá stb.

Illusztrációként számítsuk ki $\sqrt{1000}$-t. Első közelítésünk legyen $x_0 = 1000$. Ez elég durva becslés, de látni fogjuk, hogy nem baj. Közelítő értékeink:

$x_1 = 500{,}5$; $x_2 = 251{,}24$; $x_3 = 127{,}61$; $x_4 = 67{,}72$; $x_5 = 41{,}24$; $x_6 = 32{,}745$;

$x_7 = 31{,}6420$; $x_8 = 31{,}622\,78$; $x_9 = 31{,}622\,776\,6$; $x_{10} = 31{,}622\,776\,6$.

Lényegében ugyanez az algoritmus használható $\sqrt[k]{A}$ kiszámítására is. Két természetes lehetőség adódik a rekurzióra:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}\right), \tag{5}$$

illetve

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}\right). \tag{6}$$

Itt (5) látszik a természetes képletnek, az olvasó az első pillanatban talán nem is érti, minek a (6) alatti bonyolítás? Mielőtt ezt részletesen megindokolnánk, bemutatjuk $k=3$-ra mindkét algoritmust, amikor $A=1000$ (azaz $\sqrt[3]{A}=10$).

Először egy rossz kezdőértékkel indulunk: $x_0=1000$, majd egy jobbal: $x_0=20$. Az eredmények:

(5) alapján	a hiba	(6) alapján	a hiba
$x_0=1000$-re			
1000		1000	
500,0		666,7	
250,0		4444,4	
125,0		296,3	
62,5		197,5	
31,4		131,7	
16,2	6,2	87,8	
10,006 6	0,006 6	58,5	48
9,996 7	0,003 3	39,16	29
10,001 64	0,001 6	26,322	16
9,999 175	0,000 8	18,03	8
10,000 412		13,04	3
9,999 794		10,655	0,65
10,000 103		10,039 5	0,039
9,999 948		10,000 155	0,000 15
10,000 025		10,000 000 0	0,000 000 0
$x_0=20$-ra			
20		20	
11,25		14	
9,57		11	
10,24		10,10	
9,888		10,001	
10,058		10,000 000 1	
9,971			
10,014			

Összehasonlítva a fenti számsorokat a következőket „vesszük észre": Az (5) képlet sokkal gyorsabban közelíti meg a gyököt, viszont a közelébe érve alásüllyed és oszcillálni kezd körülötte. Amíg távol van, a hibák durván feleződnek. Néhol nagy szerencse is érhet bennünket: ha (5)-be pontosan 16,18-ot helyettesítünk, a következő közelítés 9,999 91 lesz, ha pedig 16,19-ot, akkor 10,0025-et kapunk. Így, amikor 1000-rel indultunk, az egy nem várt szerencse, hogy hirtelen belepottyantunk a gyökbe. Amikor $x_0=20$-ból indultunk ki, nem is élveztük ezt az indokolatlan előnyt. Ezzel szemben a (6) képlet lassabban közelíti meg a gyököt: a hibák minden lépésben durván 2/3-dal szorzódnak, ez jelentős veszteség. Amikor azonban már a gyök közelébe értünk, a (6) algoritmus lényegesen gyorsabbá válik.

1. *feladat.* Mutassuk meg, hogy (6) mindig felülről közelíti $\sqrt[k]{A}$-t. (Számtani-mértani közép!)

2. *feladat.* Jelöljük h_n-nel az n-edik közelítés hibáját. Adjunk külön (5) és (6) esetében becslést h_{n+1}-re h_n-nel. Mutassuk meg, hogy ha h_n elég kicsi, akkor (6) lényegesen jobb, mint (5).

Megjegyzés. (Ezt a megjegyzést az olvasó azután olvassa csak el, mikor a **2.** feladatot már megoldotta.) A **2.** feladatra könnyű elemi megoldást adni algebrai átalakításokkal és egyszerű becslésekkel. Mégis, legjobban a következő gondolatmenet mutat rá arra, miért kell (6)-ot venni (5) helyett. Legyen $B=\sqrt[k]{A}$. Ekkor $x=B+h$-ra $(B+h)^{k-1}\approx B^{k-1}+(k-1)B^{k-2}h$. Így

$$\frac{A}{x^{k-1}} \approx \frac{B^k}{B^{k-1}+(k-1)B^{k-2}h} = B-\frac{(k-1)B^{k-1}h}{B^{k-1}+(k-1)B^{k-2}h} =$$

$$= B-(k-1)h\cdot\frac{1}{1+(k-1)\cdot\frac{h}{B}} \approx B-(k-1)h\cdot\left(1-(k-1)\frac{h}{B}\right) =$$

$$= B-(k-1)h+(k-1)^2\cdot\frac{h^2}{B}.$$

Innen már látszik, hogy ha x_n-et $(k-1)$-szer vesszük, $\frac{A}{x_n^{k-1}}$-t pedig 1-szer, úgy kiesik a $(k-1)h$, és ekkor lesz kis h-ra legjobb a képlet.

Algoritmusok sebessége

Az alábbiakban kombinatorikus algoritmusok közül mutatunk be néhányat. A matematikában vannak olyan esetek, ahol az a probléma, meg lehet-e oldani egy feladatot valamilyen (véges sok lépés után befejeződő) algoritmussal. Ilyen típusú kérdésekkel foglalkozunk egy kicsit a következő cikkben. A mostani problémákban mindig csak véges sok esetről van szó, melyek egy géppel elvben könnyen felsorolhatóak, így a keresett objektum vagy optimum algoritmikus megtalálása nem okozhat gondot. A matematikai kérdés az, hogyan lehet az általunk keresett objektumot, vagy optimumot *ésszerű* időn belül megtalálni. Ilyen problémával már találkoztunk az egész számok osztóinak megkeresésénél. Most bemutatunk még két ilyen problémát.

Az utazó ügynök problémája. Látszólag játékos, valójában igen fontos gyakorlati problémáról van szó. Így szoktuk fogalmazni:

Egy utazó ügynök 50 várost akar bejárni, hogy portékáját körbekínálgassa. Ha az i-edik várost V_i-vel jelöljük, az ügynök azt is tudja, mennyibe kerül (időben vagy pénzben) az i-edik és j-edik város közötti utazás. Ezt a költséget (vagy időt) c_{ij}-vel jelöljük. Az ügynök kiindul a V_1 városból, valamilyen sorrendben végigjárja a többi várost, majd visszatér V_1-be. A költsége függ attól, hogy milyen sorrendben jár körbe. Például nem szokott kifizetődő lenni a Győr—Nyíregyháza—Sopron—Debrecen—Szombathely—Záhony—Győr városokon átvezető körutazás. Keresendő a legolcsóbb körjárat.

A feladat naiv megoldása a következő lenne: a $V_1, \ldots, V_n$ városok permutációi között van egy közismert — lexikografikus — sorrend*. Ebben, ha például az $n=9$-re $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_3V_7V_8$ permutációnál tartunk, akkor meg tudjuk mondani, hogy a következő néhány permutáció éppen a $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_3V_8V_7$,

* A lexikografikus sorrend a következőket jelenti: ha adott két permutációnk, $V_{i_1}V_{i_2}\ldots V_{i_n}$ és $V_{j_1}V_{j_2}\ldots V_{j_n}$, akkor megkeressük a legkisebb olyan k-t, amelyre $i_k\neq j_k$ (de persze $i_{k-1}=j_{k-1}$, $i_{k-2}=j_{k-2}$, ..., $i_1=j_1$). Ha $i_k<j_k$, akkor az első permutáció megelőzi a másodikat, ha pedig $i_k>j_k$, akkor fordítva.

majd $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_7V_3V_8$, $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_7V_8V_3$, $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_8V_3V_7$, $V_1V_5V_9V_2V_6V_4V_8V_7V_3$, $V_1V_5V_9V_2V_6V_7V_3V_4V_8$, ... következik. Ilyen módon fel tudjuk sorolni az összes permutációt, mindegyikre kiszámítjuk a költséget és kiválasztjuk a legolcsóbbat.

Feladat. Fogalmazzuk meg, hogyan lehet adott permutációra a lexikografikus rendezésben permutációt előállítani, hogy mi volt fent a szabályosság.

Visszatérve a fenti problémára, azt nem lehet a permutációk felsorolásával „reális" időben megoldani. Ha például olyan számítógépünk van, amellyel másodpercenként 1 000 000 permutációt tudunk elintézni 10—20 város esetén, akkor 18 város esetén hozzávetőlegesen 200 évre, 20 város esetén pedig 75 000 évre volna szükségünk. EZ NEM MEGY!

Valaki most azt mondhatná, hogy nem igazi tragédia, hogy a fenti feladatokat nem tudjuk megoldani, hiszen ilyen kérdéseket csak a matematikusok eszelnek ki, a gyakorlati életben ezek a kérdések nem érdekesek. Mutatunk egy gyakorlati problémát, ahol éppen a fenti kérdést kell megoldani.

Tegyük fel, hogy egy alkatrészből akarunk 10 000-et legyártani, és eközben mindegyikre ugyanoda 50 lyukat kell fúrnunk. A fúrógépünk NC, azaz, számítógéppel vezérelt. A számítógép mozgatja a munkadarabot a fúró alatt, mikor az egyik lyukat kifúrtuk és az új lyukra akarunk átmenni. Két motort tudunk bekapcsolni: az egyik jobbra-balra mozgatja a gépet 5 cm/s sebességgel, a másik előre-hátra ugyanekkora sebességgel. A számítógép ismeri a fúrandó lyukak helyét és a megmunkálási idő jelentős részét arra szánja, hogy az *i*-edik lyukról a *j*-edikre áttérjen. Ez az idő persze függ attól, milyen sorrendben fúrjuk ki a lyukakat. ÉPPEN EGY „UTAZÓ ÜGYNÖK" FELADATOT KELL MEGOLDANUNK!

Még egy gyakorlatban gyakori kombinatorikus algoritmus problémát mutatunk be. Ezt HÁTIZSÁK FELADATNAK nevezik. Magyarországon előfordult ez pl. a következő alakban: Hatalmas vasdarabokat akarnak hengerlés után hőkezelni. Evégett ezeket egymásra teszik, majd egy kb. 4 m magas „harangot" tesznek rájuk és több száz °C-on mondjuk 3 napig hevítik. Mármost tegyük fel, hogy ezek között a munkadarabok között van 500 db 75 cm magasságú, 700 db 210 cm-es, 400 db 312 cm-es, 800 db 112 cm-es, 200 db 180 cm-es és 800 db 80 cm-es. Hogyan kell ezeket úgy csoportosítani, hogy a leghamarabb készen legyünk a munkával, ha 100 hőkezelő harangunk van? Más szóval, hogyan kell őket úgy csoportosítani, hogy minden csoportban a magasság-összeg legfeljebb 4 m legyen, és ugyanakkor a legkevesebb csoportunk legyen?

Matematikailag úgy szokták a feladatot megfogalmazni, hogy adottak 1 mélységű tartályok és $a_1, \ldots, a_n$ magas darabokat akarunk beléjük elhelyezni egymásra, a lehető legkevesebb számú tartályt használva fel. Hogyan lehet az optimális vagy majdnem optimális csoportosítást megtalálni?

Ennek a két utóbbi feladatnak az a közös vonása, hogy még ma sem ismerünk olyan matematikai algoritmust, amelyik reális (=nem túl kicsi, bár nem is túl nagy) méretek esetén a pontos minimumot belátható időn belül megtalálná. Meg kell elégednünk olyan (gyors) algoritmusokkal, melyek eredményei csak közel optimálisak. (Ezzel kapcsolatban lásd *Lovász László:* Számítógépek, algoritmus, matematika című cikkét! KöMaL. 1982 március.)

Mégis, hogyan mérjük az algoritmusok sebességét?

Természetesen az algoritmus végrehajtásához szükséges lépések számával. Ezért meg kell mondanunk, mik is ezek az elemi lépések. Ennek érdekében minden algoritmust, mellyel eddig foglalkoztunk, vagy foglalkozni fogunk, úgy képzelünk el, mint egy speciális számítógépre írt „programot". Adott végtelen

sok doboz: $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ (ezek a számítógép rekeszei), és ezekben, mondjuk, legfeljebb 10 jegyű számokat tárolhatunk. Egy lépésben kiemelhetünk két ilyen számot, és megvizsgálhatjuk, melyikük nagyobb; összeszorozhatjuk, összeadhatjuk őket, kivonhatjuk egymásból, majd az eredményt visszarakhatjuk egy másik rekeszbe (vagy ha az eredmény 10-nél több jegyű, akkor két rekeszbe). Azt is megtehetjük, hogy a rekeszek tartalmát indexeknek tekintjük, s az ilyen indexű R_k dobozok tartalmával végezzük el a műveleteket. Ha az algoritmusban választ elé érünk, az csak olyan lehet, ahol két doboz tartalmát összehasonlítjuk, és attól függően, hogy melyik nagyobb, csináljuk ezt vagy azt.

Mármost egy algoritmus (=program) alkalmazásához először a bemenő adatokat kell elhelyezni. Ezeket mindig a lehető legkevesebb helyre próbáljuk beírni. Ha ehhez n dobozra (memóriarekeszre) van szükség, akkor a *feladat mérete* definíció szerint n. Minden n méretű, adott típusú feladatra megnézzük, hogy az általunk tekintett algoritmus hány lépésben találja meg a megoldást. Ha a lehető legrosszabb esetben $f(n)$ lépésre van szükség, akkor azt mondjuk, hogy az *algoritmus sebessége* $f(n)$. Így tehát ez a sebesség nem egy szám, hanem egy függvény. Ugyanarra a feladatra több különböző megoldó algoritmust is tekinthetünk. Ha az egyik sebessége $f(n)$, a másiké $g(n)$ és $f(n)/g(n) \to \infty$, akkor a második algoritmust *gyorsabbnak* (jobbnak, hatékonyabbnak) mondjuk.

Természetesen ugyanazt az algoritmust nemcsak az általunk használt speciális számítógépen, hanem más, akár „igazi" számítógépeken is megfogalmazhatjuk. Ekkor a feladat mérete csakúgy, mint az algoritmus sebessége megváltozhat. Egy egyszerű példa: ha a dobozaink nem 10 jegyűek, hanem 20 jegyű számokat képesek tárolni, máris minden feladat mérete a felére csökken! Ugyanakkor ha egy algoritmus gyorsabb egy másiknál, akkor — általános feltételek mellett — akármilyen számítógépre átírva is gyorsabb algoritmust kapunk. Ha a sebességek hányadosa korlátos, azaz vannak olyan pozitív c_1 és c_2 számok, melyekre $c_1 < f(n)/g(n) < c_2$ minden n-re, akkor megfelelő, „célorientált" számítógéppel mindkét algoritmus „gyorsabbá" tehető a másiknál.

Figyeljük meg, hogy az algoritmusok általunk definiált hatékonysága nem függ attól, hogyan viselkednek „kis" n-ekre. Ennek egyik oka az, hogy bármely algoritmust kiegészíthetünk egy olyan „előkészítéssel", amely például minden 100-nál kisebb méretű feladatra azonnal megmondja a végeredményt (ezzel persze az algoritmus méretét nagyon meg kell növelnünk). Ennél hatékonyabb algoritmus pedig — legalábbis $n<100$-ra — nem létezik.

Adatkezelő algoritmusok

Legyen problémánk a következő. Adott n szám, $a_1, \ldots, a_n$ és szeretnénk a számokat nagyság szerint monoton növő sorba rendezni. Erre három algoritmust mutatunk be.

1. algoritmus. Az n számot berakjuk az $R_1, \ldots, R_n$ rekeszekbe. Ezután $j=1, 2, \ldots, n$-re a következő lépéssorozatot hajtjuk végre:

Összehasonlítjuk az első két doboz tartalmát, a nagyobbikat R_2-be, a kisebbiket R_1-be rakjuk. Ezután R_2 és R_3 tartalmára alkalmazzuk ugyanezt: közülük a nagyobbat R_3-ba, a kisebbet R_2-be tesszük, ..., R_i és R_{i+1} tartalmát összehasonlítva a nagyobbat a nagyobb indexű dobozba tesszük. Így megy ez $i=1, 2, \ldots, n-j+1$-re.

Mikor $j=1$-re befejeztük a lépéssort, a legnagyobb elem a legutolsó dobozba, R_n-be kerül. Mikor $j=2$-re is befejeztük a lépéssort ($i=n-1$-ig menve csak) R_{n-1}-ben lesz a második legnagyobb elem. Hasonlóan a j-edik futam után $R_n, R_{n-k}, \ldots, R_{n-j+1}$ a legnagyobb, második legnagyobb, ..., j-edik legnagyobb elemet fogja tartalmazni. A $j=n-1$-edik futam után minden elem a kívánt helyén lesz.

Ezt az algoritmust BUBORÉK ALGORITMUSNAK is nevezik, mivel a nagy (=nehéz) elemek lefelé, a kicsi (=könnyű) elemek fölfelé szállnak. Igen rossz teljesítményű, hiszen $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1$ cserét igényel, lépésszáma cn^2.

2. algoritmus. Ez az algoritmus, mely

a KÁRTYA ALGORITMUS nevet viseli, azért érdekes, mert látszólag kevés lépés alatt teszi sorba számainkat, valójában ennek is cn^2 a lépésszáma.

Képzeljük el, hogy adott n kártya, mindegyiken egy-egy valós szám. Sorba szeretnénk őket rakni. Az algoritmus k-adik lépésében ($k=1, 2, \ldots, n-1$) már az első k számot (kártyát) sorbaraktuk egy külön pakliban. Most leemeljük a rendezetlen pakli felső lapját, és megpróbáljuk beilleszteni a már sorbarendezett k lap közé az őt megillető helyre. Ezt a következő, ún. felezési eljárással $c \cdot \log k$ lépésben megtehetjük: megnézzük a rendezett pakli középső, $(k/2)$-edik lapját. Ha az új lap ennél nagyobb, a felső $k/2$ lapra szorítkozhatunk, különben az alsó részre. Ezután vagy a $(3k/4)$-edik lappal hasonlítjuk össze, vagy a $(k/4)$-edikkel, ...

Így a pakli sorbarakásához a szükséges lépésszám:

$$c \cdot \log 1 + c \cdot \log 2 + \ldots + c \cdot \log n \approx$$
$$\approx c \cdot n \cdot \log n.$$

Ha most ezt az algoritmust *mechanikusan* átfogalmazzuk számítógépünkre, kiderül, hogy cn^2 lépésszámot igényel. Igaz ugyan, hogy az összehasonlítások száma $c \cdot n \cdot \log n$, de számtalan egyéb művelet is bejön. Ezek között lényegtelen, hogy a már megrendezett rész bizonyos felét feleznünk kell. Lényeges azonban, hogy amikor a soron következő kártya helyét megtaláltuk, akkor a már megrendezett rész nagyobbik részét (akár az összeset) eggyel hátrébb kell „csúsztatnunk". Ez azt jelenti, hogy az összes rákövetkező rekesz tartalmát eggyel nagyobb indexű rekeszbe kell tennünk, s ezek együttvéve már cn^2 lépést jelentenek.

Végül lássunk egy olyan algoritmust is, mely valóban $c \cdot n \cdot \log n$ lépéses, ez a *3. algoritmus*. Képzeljük el, hogy van két pakli kártyánk, melyekben a számok már nagyság szerint növekvő sorrendben állnak. A kettőből egyetlen rendezett paklit könnyű csinálni: a felső kártyákat összehasonlítjuk, s a kisebbet levesszük. Ez lesz az új pakli legkisebb kártyája. Ezután ismét megnézzük a két felső kártyát, s megint levesszük a kisebbet, ez a második legkisebb kártya, ... Ezzel a két paklit *összefésültük*. Ezt használja fel sokszor az ÖSSZEFÉSÜLŐ ALGORITMUS. A kártyapaklit *blokkokra* osztjuk, kezdetben minden blokk egyetlen kártyából áll. Ezután a blokkokat kettesével csoportosítjuk, s ezeket a párokat összefésüljük, a blokkok száma tehát feleződött. Ezeket a blokkokat ismét párokba osztjuk, ismét összefésüljük őket, egészen addig, míg egyetlen blokkot kapunk. Ebben már az összes kártya nagyság szerint rendezve van.

Ha most már adott n szám, akkor az összefésülő algoritmus a következőképpen dolgozik. Feltesszük, hogy $n=2^k$. Először kettes csoportokra osztjuk a számokat tartalmazó rekeszeket, egy csoportba R_{2i-1} és R_{2i} tartozik ($i \leqq 2^{k-1}$), és egy ilyen páron belül sorbarakjuk a számokat (azaz a két egyes blokkot összefésüljük). A j-edik menetben ($j=1, 2, \ldots, k-1$) már 2^{j-1} nagyságú monoton blokkjaink vannak, ezek közül a $2i-1$-ediket és a $2i$-ediket fésüljük össze egy blokkba. Ehhez 2^j-1 lépés kell. Ezzel az n számot 2^j nagyságú monoton blokkokba rendeztük, és ehhez összesen n-nél kevesebb lépést használtunk fel. A teljes rendezéshez $k-1$ menet szükséges, így a lépésszám $k \cdot n = n \cdot \log n$.

Magát az algoritmust számítógépünkre könnyen meg lehet fogalmazni, ha a számok tárolására nem n, hanem $2n$ rekeszt használunk fel. Kezdetben a számok az $R_1, \ldots, R_n$ rekeszekben vannak, azután kettes blokkokban átrakjuk őket az $R_{n+1}, \ldots, R_{2n}$ rekeszekbe. Innen már négyes blokkokban visszarakjuk az $R_1, \ldots, R_n$ helyekre, majd megint felülre 8-as blokkokban stb. Ezzel az algoritmus lépésszáma nem nő „lényegesen", azaz kisebb, mint $c \cdot n \cdot \log n$ valamilyen $c>0$ konstanssal.

Sok más rendező algoritmus ismeretes, olyanok is, melyek az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ memóriarekeszeken kívül csak további

20 memóriarekeszt használnak — úgy mondjuk, helyben rendeznek — és mindezt $c \cdot n \cdot \log n$ lépésben. Megmutatható, hogy ha nem használjuk ki a rendezendő számok speciális tulajdonságait, hanem csak azt, hogy közülük bármely kettőről egy lépésben eldönthető, melyik kisebb, akkor n szám megrendezéséhez legalább $c \cdot n \cdot \log n$ összehasonlítást kell végeznünk. Így egy rendező algoritmusnak is legalább ennyi lépésesnek kell lennie.

Feladat. Bizonyítsuk be a fenti állítást.

Feladat. Tegyük fel, hogy a megrendezendő számaink egészek és abszolút értékben legfeljebb M értékűek! Készítsünk olyan algoritmust, mely $c \cdot (n+M)$ lépésben rendezi a számokat!

BOGDÁN ZOLTÁN
középiskolai szakfelügyelő
Cegléd

Néhány gondolat a gimnáziumi matematika-szakkör érdekében

Sokan megfogalmazták már, hogy a matematika megismeréséhez nem vezet könnyen járható út. Az eredményes előrehaladáshoz sok idő, szorgalom és bizonyos adottságok kellenek. Sokszor egy mondat megértése perceket, esetleg 10 perceket kíván. Az alkalmazhatóság rendkívül széles körű, és így gyakran a legfontosabbnak tartott feladattípusok sorravétele sem fér az órák, és az igen korlátozott otthoni munka kereteibe, pedig a nem gyakorolt területek példaanyagához a tanulók tekintélyes része önállóan hozzá sem tud szólni. Ha azt akarjuk, hogy az alkalmazó képesség és az ismeretrendszer eléggé széles és mély legyen, az aránylag szűk óratervi óraszámok mellett a tanulási alkalmak sokféleségét kell iskoláinknak biztosítaniuk.

Sokat vitatott kérdés napjainkban a tehetséggondozás, egy-egy tantárgy korszerű tanítása, a gyengék felzárkóztatása, majd permanens segítése, vagy éppen az átlagos képességűek tanítása. Lapjainkban ellentmondó vélemények olvashatók; ki a tehetségek kibontakoztatását, ki a gyengék felzárkóztatását tartja fontosnak, ki pedig az „Éltanulók, rossz tanulók — meg a többiek" közül a többiek hatékony oktatásáért emel szót. A vélemények sokasága a sokféle tennivalót tükrözi, és nem szembe kell állítani ezeket a nézeteket, hanem egymás mellé. Mindenesetre nekem is az a véleményem, hogy a tehetséggondozás egy kicsit több energiát, konkrét formákat, az e munkát végzők fokozottabb megbecsülését kívánja. Mint szakfelügyelő, gyakran tapasztalom, hogy a matematikatanárok egy része szívesen lemond a tehetséges tanulókkal való külön foglalkozásról (pl. a szakkörről), mert vagy nem vállalja a fokozott fölkészülést, a tanulmányi versenyek, a KöMaL feladatainak megoldását, vagy nem tartja érdemesnek egy-egy óradíjért a megfizetett órák kétháromszorosának befektetését. Nemrégiben a Köznevelésben egy, a tehetséggondozást mindenek elé helyező cikkben azt olvastam, hogy „iskolarendszerünkön belül létre kell hoznunk azt a hálózatot, amely a tehetségesek sajátos gondozására hivatott". Nem tudok úgy előre látni, hogy megbecsülhessem, mikorra alakul ki ilyen, a mait lényegesen fölülmúló hálózat, de abban bizonyos vagyok, hogy a matematika tanításában kialakult, és a középiskolában meglevő formák fönntartásával az előbbiekben említett problémák nagy részben megoldhatók. Sok helyütt igyekszenek is megoldani: például Pest megye egyes iskoláiban az első osztályokban fölmérik a gondolkodó képességet, az ötletességet, és a jó eredményt felmutató tanulóknak javasolják a szakköri munkát. Zalában nyilvántartást vezetnek a tehetséges és a matematika iránt érdeklődő tanulókról, bevonják őket a szakköri munkába, a KöMaL

feladatok megoldásába, minden nyáron matematikai tábort szerveznek számukra. A kiemelkedő tehetségek az ún. olimpiai szakkörökbe küldhetők.

A gimnáziumi tantervi reform harmadik évében kirajzolódik előttünk a változás teljes képe. Én most az óraszámok változásaira szeretném a figyelmet fordítani. A régi tantervben a matematikát háromféle óraterv szerint tanítottuk, ezek közül a speciális matematika tagozat abban a 7 iskolában, amelyben eddig is működött, továbbra is megmarad. Ezzel most ne foglalkozzunk! Az új tantervben a matematika óraszáma az első két évben egységes, harmadiktól kezdve pedig háromféle lehet. Az óraszámokat az alábbi táblázat mutatja:

	Régi tanterv		Új tanterv		
	alap-tanterv	matema-tika I.	alap-tanterv	„A" változat	„B" változat
I. osztály	5	8	5	5	5
II. osztály	4	7	4	4	4
III. osztály	4	6	3	5	7
IV. osztály	4	6	3	6	8

Tapasztalataim szerint — iskolánk 8 éve tanít a fakultatív rendszerben — harmadikban, negyedikben a tanulók 20%-a választja fakultatív tárgyként a matematikát, többségükben az „A" változatot. Viszonyítsunk a régi alaptanterv óraszámaihoz! Az „A" változat óraszámtöbblete 1+2, a régi tantervben a matematika I. tagozat óraszámtöbblete 3+3+2+2 volt. A „B" változat esetén ez az óraszámkülönbség kedvezőbb: 3+4, de ez sem éri el a matematika I. tagozat jelentette többletet. A tanulók többségénél — az alaptantervet tanulóknál — a régi óraszámhoz képest 2 óra veszteség mutatkozik. Világosan láthatjuk tehát, hogy a matematikatanítás volumene a korábbihoz képest határozottan csökkent. (Zárójelben megjegyzem, tisztában vagyok azzal, hogy a fakultáció a tanulók tehermentesítését is szolgálja, és egyetértek ezzel.)

Gondolataim megírására az késztetett, hogy több helyütt hallottam a következő két állítást: Az új tanterv érvénybelépése után nem lesz szükség többé az egyetemi előkészítő tanfolyamokra, illetve: Szakköröket csak első és második osztályban érdemes szervezni. E kijelentéseket művelődésügyi vezetők mondták igazgatók, szakfelügyelők értekezletein. Arról van tehát szó, hogy a fakultatív formákat olyan hatékonynak tartják, ami fölöslegessé vagy részben fölöslegessé tenné a szakkört, egyetemi előkészítőt. Meggyőződésem, hogy ez a nézet téves. Az új tanterv — a fakultatív tanterveket tekintve — lényegesen bővebb a réginél, és az „A" változatnál az óraszámtöbblet csekély. A matematikát igénylő továbbtanuláshoz jó fogalomrendszerre, bizonyított tételek ismeretére és jó feladatmegoldó gyakorlatra van szükség. Javítanunk kell a matematikatanítást a tekintetben, hogy egyes fejezetek anyaga ne bizonyítás nélkül kimondott tételek rendszerére épüljön. Közel három évtized alatt szerzett tapasztalataim alapján mondhatom, hogy a szakkör, az egyetemi előkészítő, az egyetemi hallgatókkal és oktatókkal való levelezés és még néhány egyéb változat nélkül nem tudunk teljesítőképes tudást elérni széles körben. A formákat tehát nem szűkíteni, hanem bővíteni kellene, mert azoknak alkalmazkodniuk kell a tanulók képességeihez és érdeklődéséhez is. A szabad szombat bevezetése is némi veszteséget jelent majd. Ebben is pótlást jelenthetnek a szóban forgó lehetőségek. A túlterheléstől nem kell félni. Ezeken az órákon — pl. az én iskolámban — a ta-

nulók 6—8%-a vesz részt, olyanok, akiknek az így megszerzett tudásra szükségük lesz.

A mi iskolánkban — 4×4 osztályos gimnázium — az I., III. és IV. évfolyamon van matematika-szakkör. A II. évfolyamon a heti 2 órás matematika szabad sáv miatt nincs kellő érdeklődés ebben az évben, bár tavaly a II. évesek számára is volt szakkör. Egyetemi előkészítő tanfolyam működik mindkét felső osztály számára. Mind harmadikban, mind negyedikben „A" és „B" változatú fakultatív csoport egyaránt van. Tanítványaink az iskolában minden szükséges segítséget megkapnak. Emellett levelezznek főiskolák, egyetemek hallgatóival és oktatóival, akik feladatsorokkal segítik fölkészülésüket. Természetesen a lehetőségek kihasználására ösztönözni kell a diákokat. Nem erőszakoskodni, hanem irányítani, meggyőzni őket. A felnőtt, képzett pedagógus, illetve pedagógus közösség tudhatja, mire van szüksége a rábízott tanítványoknak, a gyerek pedig nem biztos, hogy tudja. Sokunknak szokása, hogy elsőben fölméri, másodikban pontosítja a tanulók pályaválasztási szándékát. Ennek alapján adunk tanácsot a szaktárgyainkkal összefüggő óratervi és óraterven kívüli formák megválasztásához.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!)

A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

993. A természetes számok mely részhalmazaira teljesül: a részhalmaz bármely két eleme és ezek szorzata is ugyanarra a kétjegyű számra végződik?

Strohmajer János, Budapest

994. Egy körbe írt konvex $(2n+1)$-szögnek van n darab $(n-1)\frac{\pi}{n}$ nagyságú szöge. Bizonyítsuk be: van két egyenlő oldala!

Lasztóczi Gyula, Budapest

995. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCDEF$ konvex hatszög átellenes, A, D; B, E; C, F csúcspárjait összekötő átlók akkor és csak akkor bontják a hatszöget két-két egyenlő területű négyszögre, ha az ACE és BDF háromszögek súlypontja azonos, továbbá a két háromszög erre a pontra középpontosan hasonló!

Ratkó István, Budapest

996. Jelölje S_n, illetve C_n azt az $n \times n$-es determinánst, amelynek i-edik sorában a j-edik elem $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right)$, illetve $\cos\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right)$. Határozzuk meg minden pozitív egész n-re e determinánsokat!

Gáspár Gyula, Miskolc

997. Az (a_n) valós számsorozatot súlyozott számtani sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan α, β pozitív valós számpár, hogy $\alpha+\beta=1$ és minden $n(\geqq 2)$-re

$$a_n = \alpha a_{n-1}+\beta a_{n+1}.$$

Legyen (b_n) pozitív egészekből álló számtani sorozat. Igazoljuk, hogy akkor bármely (a_n) súlyozott számtani sorozat (a_{b_n}) részsorozata is súlyozott számtani sorozat!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

998. Bizonyítsuk be:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n}{n+k}\binom{n}{k} = \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (969—974.)

969. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan számrendszer van, amelyben egy háromjegyű szám kétszer akkora, mint az ugyanezekkel a számjegyekkel (ugyanolyan sorrendben) felírt tízes számrendszerbeli szám!

Megoldás: Legyen a keresett alapszám az n. A feladat feltételei miatt:

$$an^2+bn+c = 2(100a+10b+c),$$

ahol a, b, c a háromjegyű szám jegyei. A fenti egyenlőségből

$$(n^2-200)a+(n-20)b+(-c) = 0. \qquad (*)$$

Ha $n\leqq 14$, akkor a $(*)$ bal oldalán negatív szám állana, ha pedig $n\geqq 16$, akkor a $(*)$ előbbi oldalára:

$$0 = (n^2-200)a+(n-20)b+(-c) \geqq 56a-4b-c > 0,$$

hiszen $a \geqq 1$ és $4b+c\leqq 45$.

Így $n=15$ lehet csak.

Ez megfelel, mivel a $(*)$-ból adódó

$$25a-5b-c = 0$$

miatt $5|_c$, azaz $c=0$ vagy $c=5$.

Ha $c=0$, akkor a fenti egyenletünk miatt $a=1$ lehet csak, s akkor $b=5$.

Ha viszont $c=5$, akkor a fentiből adódóan

$$5a = b+1,$$

tehát $a=1$ és $b=4$, vagy $a=2$ és $b=9$.

Könnyen látható, hogy a nyert tízes számrendszerbeli 150, 145 és 295 számok kétszerese a tizenötös számrendszerben is ugyanezekkel a számjegyekkel írható fel.

Kormos Gizella, Sümeg

A megoldók száma: 19.

970. Egy dobókocka minden lapját véletlenszerűen fessük be három szín egyikével. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kocka szemközti lapjai között vannak egyszínűek?

Megoldás: Mivel dobókockáról van szó, ezért lapjai — számozottságuk miatt — kitüntetettek. Így az összes lehetséges módon történő kifestés száma: 3^6, mivel minden lap színe háromféle lehet.

A kedvezőtlen eseteket fogjuk megszámlálni, azaz csakis olyan kifestéseket tekintünk, amelyekben nincs két azonos színű, szemköztes lappár. Két szemköztes lappár, például az 1-es és a 6-os, hatféleképpen festhető ki úgy, hogy a lapok különböző színűek. Mivel a lappárok színezése független egymástól, ezért a kedvezőtlen esetek száma: 6^3.

Így a keresett p valószínűség

$$p = 1 - \frac{6^3}{3^6} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Bartha Gábor, Szentendre

Megjegyzés: Ha a lapoknak nincs kitüntetett szerepe, azaz a lapok számozatlanok, akkor minden olyan színezését a kockának, amelyek mozgással fedésbe hozhatók, nem tekintünk különbözőnek. A MT 1980. október 5. szám 155. oldalán, *Bereznay Gyula—dr. Varecza Árpád: Megjegyzés egy versenyfeladathoz* cikkének **1. tétele** szerint a kockának ekkor

$$P(G\colon 3, 3, 3, 3, 3, 3) = \frac{1}{24}\,(3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2) = 57$$

különböző színezése van. Ezek között 10 olyan, amelyben semelyik szemköztes lappáron sincs azonos szín. Ugyanis: ilyen esetben legalább két színt kellett felhasználjunk. Ha pontosan két színt használtunk, akkor ez csak úgy volt lehetséges, hogy mindkét színnel 3-3 lapot festettünk meg, mégpedig a kocka átellenes csúcsaira illeszkedő 3—3 lapot. Ez 3 esetet jelent, hiszen a fel nem használt szín ennyiféle lehet. Ha valamennyi színt használtuk, akkor egy színnel legfeljebb három lapot festhettünk be, s ezek a lapok a kocka egyazon csúcsára kellett illeszkedjenek. Így, ha a három szín mindegyikét alkalmaztuk, és közülük az egyiket három lap festésére, úgy a maradó három lap közül pontosan kettő azonos színű. Ez utóbbi kétféle szín közül volt választható, a három egyszínű lap színe pedig háromból, tehát 6 további esetet kaptunk. Ha nincs három azonos színű lap, akkor mindhárom színt 2-2 lapra festettük, s ezek az egyszínű lapok közös élűek. Ez egyetlen eset. Így a keresett valószínűség: $\frac{47}{57}$.

Gőgh József, Gúta, dolgozatából

A megoldók száma: 10.

971. Hogyan kell megválasszuk a

$$13x^3 + 2669x^2 - 45\,373x + c = 0$$

egyenletben a c értékét, hogy az egyenlet legnagyobb gyökének négyzete egyenlő legyen a másik két gyök szorzatával?

Bakos Tibor, Budapest

Megoldás: Az egyenlet gyökeit jelöljük x_1, x_2, x_3-mal. Feltehető, hogy $x_1 < x_2 < x_3$. Az $x_3^2 = x_1 \cdot x_2$ feltételből adódik, hogy

$$x_1 < x_2 < 0 < x_3 \qquad \text{és} \qquad |x_2| < x_3 < |x_1|.$$

Ezt egybevetve a gyökök és együtthatók közötti összefüggésekkel

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2669}{13}, \tag{1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -\frac{45\,373}{13}, \tag{2}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{c}{13} \tag{3}$$

adódik egyrészt $c < 0$, másrészt $x_3^3 = -\frac{c}{13}$.

Ha az $x_1 x_2 = x_3^2$-t (2)-be helyettesítjük és x_3-at kiemelve az (1)-et is figyelembe vesszük, akkor

$$x_3 = \frac{45\,373}{2669} = 17$$

eredményhez jutunk. Ebből

$$c = -13 \cdot 17^3 = -63\,869.$$

Fentiekkel $x_2 = -\frac{17}{13}$ és $x_1 = -13 \cdot 17 = -221$ adódik. Ezek kielégítik feltételeinket.

Bíró Béla, Barót és Zalán Péterné, Budapest

A megoldók száma: 26.

972. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha van két egyenlő hosszú belső szögfelezője!

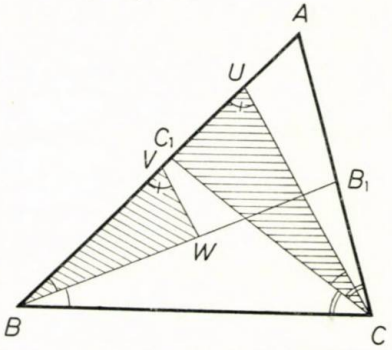
I. megoldás: A feltétel szükségessége nyilvánvaló, mivel az egyenlő szárú háromszög tengelyesen szimmetrikus alakzat.

A feltétel elégséges is. Legyen az ABC $\triangle$-ben két szögfelelző, BB_1 és CC_1 egyenlő hosszú! Azt fogjuk igazolni, hogy akkor két szöge, mégpedig a $B\sphericalangle = \beta$ és $C\sphericalangle = \gamma$ egyenlő.

Tegyük fel eme állítás ellenkezőjét, azaz legyen

$$\beta < \gamma.$$

Mérjük fel a $C_1CA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$ szögtartomány CC_1 szárára a $\frac{\beta}{2}$-vel egyenlő $C_1GU\sphericalangle$-et.



Feltételünk miatt, a $BUC\triangle$-ben

$$UBC\sphericalangle = \beta < UCB\sphericalangle = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2},$$

ezért

$$BU > CU.$$

Mérjük most fel a BA oldalra a CU szakasszal egyenlő hosszúságú BV szakaszt, majd húzzunk V-ben párhuzamost CU-val. Ez az egyenes a BB_1 szakaszt annak belső W pontjában metszi.

A

$$BVW\triangle \cong CUC_1\triangle,$$

mert $BV = CU$ és az ezeken fekvő szögek páronként egyenlők. Az egybevágóságból viszont

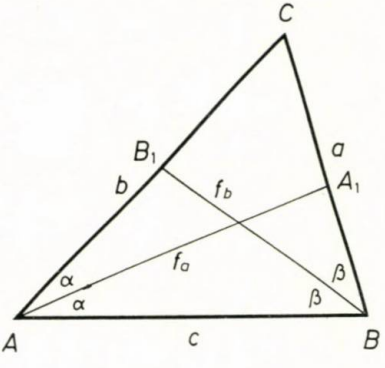
$$CC_1 = BW < BB_1$$

következik, ami ellentmond eredeti feltételünknek. Ez az ellentmondás biztosítja, hogy indirekt feltevésünk nem igaz, ezért $\beta = \gamma$ kell legyen.

Megjegyzés: A *Sklarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/1. kötet 111.c. feladatának megoldásai további három elemi bizonyítást adnak.

II. megoldás: Az elégségességet fogjuk igazolni. Az ábra jelöléseivel, az ABA_1 és az $ABB_1\triangle$-ekből, a sinustétel alkalmazásával

$$\frac{c}{f_a} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin 2\beta} \quad \text{és} \quad \frac{c}{f_b} = \frac{\sin(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$



Az $f_a = f_b$ feltétel miatt

$$\frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin 2\beta} = \frac{\sin(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

következik. Ebből az addíciós összefüggések felhasználásával:

$$\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - \sin^2\beta\cdot\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$$
$$+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta(\cos\alpha - \cos\beta) = 0.$$

Ezt szorzattá bonthatjuk a pitagoraszi összefüggések alkalmazásával:

$$(\cos\beta - \cos\alpha)[(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta)^2 + \cos\alpha\cdot\cos\beta] = 0.$$

A második tényező pozitív, mivel α és β hegyesszög; ugyanezért a

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

egyenletből csakis az

$$\alpha = \beta$$

lehetséges.

Gőgh József, Gúta

A megoldók száma: 14.

973. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$kx_1 - x_2^2 = kx_2 - x_3^2 = \ldots = kx_n - x_1^2 = m,$$

ahol k és m adott pozitív valós számok.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Mivel a $kx_i - x_{i+1}^2 = m$ egyenletekben k és m pozitívak, x_i^2 nem negatív, ezért $x_i > 0$ minden $0 < i \leqq n$ egészre. Vonjuk ki az i-edik egyenletből az $(i-1)$-edik egyenletet, majd rendezzük:

$$k(x_i - x_{i-1}) = x_{i+1}^2 - x_i^2 = (x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

A $k > 0$ és $x_{i+1} + x_i > 0$ miatt $x_i - x_{i-1}$ és $x_{i+1} - x_i$ azonos előjelű, ezért

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq x_1$$

vagy

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x_1.$$

Ezek bármelyike azonban csakis akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Ha tehát egyenletrendszerünknek létezik megoldása, az csakis $x_i = x_{i+1}$ mellett lehetséges ($1 \leqq i \leqq n$ és $n+1 \equiv 1$). Ezek szerint a megoldást az

$$x^2 - kx + m = 0 \tag{1}$$

másodfokú egyenlet gyökei adják. Ennek D diszkriminánsa:

$$D = k^2 - 4m.$$

Ha $D \geqq 0$, akkor (1) gyökei

$$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4m}}{2} \tag{2}$$

pozitívak, ha pedig $D < 0$, akkor nincs valós gyöke (1)-nek, azaz egyenletrendszerünknek nincs megoldása.

Összefoglalva: Nulla, egy vagy két valós megoldást kapunk aszerint, hogy k kisebb, egyenlő vagy nagyobb $2\sqrt{m}$-nél. A megoldásokat (2) adja.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 9.

974. Legyen tetszőleges k természetes számra és n pozitív egészre

$$S_k(n) = \sum_{m=1}^{n} m^k.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $ab \mid S_k(ab)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \mid S_k(a)$ és $b \mid S_k(b)$!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Megoldás: A **935.** feladatban (megoldása megjelent A MT 1981/1-ben) $f(i) = i$ választása esetén az $a_i = i$ sorozat n egymást követő elemének k-adik hatványösszege éppen $S_k(n)$. A megoldásból kiderül, hogy ha a sorozat n egymást követő elemének k-adik hatványösszege n-nel osztva m maradékot ad, akkor a sorozat bármely n egymást követő elemének k-adik hatványösszege is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Ezt tudva, az $a \mid S_k(a)$ és $b \mid S_k(b)$-ből következik, hogy $a \mid S_k(ab)$ és $b \mid S_k(ab)$ is teljesül; az $(a, b)=1$ miatt, tehát

$$ab \mid S_k(ab) \text{ is.}$$

Megfordítva: ha $(a, b)=1$ és $ab \mid S_k(ab)$, akkor legyen $S_k(a)$-nak a-val való osztási maradéka m. Így az $S_k(ab)$ a-val osztva ugyanazt a maradékot adja, mint bm, ha a-val osztjuk. Ugyanis: az $S_k(ab)$ b darab a tagú összegre bontható, amelyek mindegyike — az idézett feladatból következően a-val osztva m maradékot ad. De $ab \mid S_k(ab)$-ből $a \mid S_k(ab)$ következik, tehát $a \mid bm$ is teljesül. Mivel $(a, b)=1$, ezért $a \mid m$ kell teljesüljön, azaz $S_k(a)$ osztási maradékára tett feltételünk miatt

$$a \mid S_k(a) \cdot$$

Hasonlóan nyerjük feltételeinkből, hogy $b \mid S_k(b)$.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 13.

A megoldók névsora (969—974.)

Ambrus Gabriella, Budapest (972., 974.); Bagi Gábor, Barcs (971.); Bartha Gábor, Szentendre (969., 970., 972—974.); Bencze Mihály, Brassó (971—974); Bíró Béla, Barót (971., 974.); Bogdán Zoltán, Cegléd (969—974.); Borsovszky Rudolf, Budapest (969.); Csorba Ferenc, Győr (969—974.); Csörsz Sándor, Dunakeszi (969—971., 973.); Giczi Margit, Sümeg (969., 971.); Gőgh József, Gúta (969., 971—974.); Görbe László, Budapest (971.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (971.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (969., 971.); Hornyák Pál, Érsekújvár (969., 971., 972., 973. két mód, 974.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (971.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (969—972., 974.); Kamarás Lajos, Pécs (969—970., 971. két mód, 972—974.); Kondor Judit, Budapest (972.); Kormos Gizella, Sümeg (969., 971.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (970., 971.); Köntös Lászlóné, Kazincbarcika (969.); dr. Major Pál, Budapest (969., 971.); Major Piroska, Budapest (971.); Máté Bálint, Pécs (970—971.); Nyírő László, Mezőkövesd (969—972., 974.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (971.); Schutzbach Mártonné, Siófok (972.); Szánthó Gyula, Gyula (969., 972., 974.); Szombathy Csaba, Székesfehérvár (969—971.); Torkos Ferenc, Sümeg (969.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (971., 973.); Zalán Péterné, Budapest (969., 971.).

Lapunk 1980. és 1981. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük.

A jutalmazottak:

Bartha Gábor, Szentendre;
Bogdán Zoltán, Cegléd;
Kacsó Ferenc, Tîrgu-Mures;
Nyirő László, Mezőkövesd;
Tuzson Zoltán, Tîrgu-Mures;
Bencze Mihály, Brassó;
Imolya Sándor, Hódmezővásárhely;
Kamarás Lajos, Pécs;
Szánthó Gyula, Gyula;
Zalán Péterné, Budapest.

Közlemény a Nemzetközi Matematikai Kongresszusról

A soron következő Nemzetközi Matematikai Kongresszus (International Congress of Mathematicians) Lengyelországban, Varsóban lesz 1982. augusztus 11-től 19-ig.

A Kongresszus teljes szakmai programját a Kultúra és tudomány palotájában bonyolítják le, amely Varsó központjában van, közel a központi vasúti pályaudvarhoz, szállodákhoz, parkolóhelyekhez és parkokhoz.

A Nemzetközi Matematikai Unió által kijelölt Tanácsadó Bizottság javaslatára a Kongresszus Szervező Bizottsága 16 matematikust hívott meg abból a célból, hogy személyenként egyórás előadást tartsanak a Kongresszus valamennyi résztvevője számára. Ezek az előadások, amelyek a Kul-

túra és tudomány palotájának mintegy háromezer személy befogadására alkalmas Kongresszusi termében hangzanak majd el, várhatóan világos áttekintést fognak nyújtani széles érdeklődési körű hallgatóság számára a matematika újabb fontos fejlődéséről.

Ugyancsak a Tanácsadó Bizottság javaslatára 136 matematikus kapott meghívást egyenként 45 perces előadás tartására a különféle szekciókban. Úgy tervezték, hogy ezek az előadások is tágabb körre terjednek ki, és nem szorítkoznak szükségképpen csak az előadó munkásságának áttekintésére.

A szekciók jegyzéke a következő:

1. Matematikai logika és a matematika alapjai.
2. Algebra.
3. Számelmélet.
4. Geometria.
5. Topológia.
6. Algebrai geometria.
7. Komplex analízis.
8. Lie-féle csoportok és reprezentációk.
9. Valós és funkcionál-analízis.
10. Valószínűség és matematikai statisztika.
11. Parciális differenciálegyenletek.
12. Közönséges differenciálegyenletek és dinamikus rendszerek.
13. Matematikai fizika és mechanika.
14. Irányításelmélet és optimalizálás.
15. Numerikus módszerek.
16. Kombinatorika és matematikai programozás.
17. Számítógép-tudomány és információelmélet.
18. A matematika új alkalmazásai.
19. A matematika története és tanítása.

A Kongresszus résztvevői 10 perces *kiselőadást tarthatnak,* feltéve, hogy 1982. április 15-ig bejelentik részvételi szándékukat, továbbá ugyaneddig értesítik a Szervező Bizottságot közleményük címéről és arról a szekcióról, amelyikben azt előadni kívánják. A kiselőadások tartalmi kivonatát is be kell nyújtani angol, francia, német vagy orosz nyelven. A megfelelően elkészített és április 15-ig beérkezett kivonatokat sokszorosítani fogják és Varsóban átadják majd a Kongresszus valamennyi teljes jogú (rendes) résztvevőjének. A kivonatokat fekete szalaggal kell gépelni jó minőségű papírra 16,5 cm széles és 25 cm magas téglalap belsejébe. A kézzel írt jelekhez letörölhetetlen fekete tintát kell használni — lehetőleg minél kevesebbszer. A gépelési hibákat vagy az új szöveg ráragasztásával kell kijavítani, vagy pedig a hibáknak fehér javítófolyadékkal történő lefestésével. A nagybetűkkel írt vezeték- és utónevet vagy kezdőbetűket, az intézményi kapcsolatot, országot és a kivonat címét — ebben a sorrendben — egy-egy betűnyi térközzel kell gépelni. Írásvetítőre és hasonló készülékekre vonatkozó igényt előre be kell jelenteni a Szervező Bizottságnak.

A Szervező Bizottság fenntartja a jogot a rövid közlemények (kiselőadások) számának korlátozására. Abban az esetben, ha szükségessé válik ilyen korlátozás, a korábban beérkezett közleményeket fogadják majd el.

Az előadás-kivonatokat vagy a jelentkezési lappal együtt, vagy közvetlenül kell megküldeni a Szervező Bizottság *címére:* Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Śniadeckich 8, P. O. Box 137, 00—950 Warsaw, Poland.

Azokat a résztvevőket, akik *önkéntes szemináriumokat* óhajtanak tartani, arra kérik, hogy tegyenek meg minden előkészületet maguk között vagy már előzőleg, vagy a Kongresszus tartama alatt. A programban (l. alább!) e célra tervezett időben a Kongresszusi Irodán keresztül kérhető megfelelő szemináriumi helyiség biztosítása.

A Nemzetközi Matematikatanítási Bizottság (International Commission on Mathematical Instruction, rövidítve: ICMI) négy délután szimpoziont szándékozik rendezni az iskolai matematikaoktatás céljairól és tartalmáról.

A meghívott előadók előadásait, valamint a kongresszusi beszámolót az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Kongresszus kiadványai-ban fogják közzétenni. A Kiadványok előreláthatólag 1983 végén jelennek meg, és minden rendes kongresszusi résztvevő kap belőle egy példányt.

A Kongresszus előzetes programja.

A megnyitó ünnepséget augusztus 11-én 9 órai kezdettel tartják a Kongresszusi teremben. A Nemzetközi Matematikai Unió elnöke kihirdeti a Fields éremmel kitüntetettek nevét, majd kiosztja az érmeket.

A megnyitó ünnepség után a Fields éremmel kitüntetettek munkásságát ismertető előadások hangzanak el a Kongresszusi teremben.

Meghívott előadók egyórás előadásaira kerül sor augusztus 12-én, 13-án, 16-án, 17-én és 18-án 9 óra 30 perctől 10 óra 30 percig, valamint 11 órától 12 óráig, továbbá augusztus 14-én és 19-én 9 órától 10 óráig, 10 óra 30 perctől 11 óra 30 percig, végül 12 órától 13 óráig.

Az egyes szekciók meghívott előadói előadásának, a kiselőadásoknak és a szemináriumoknak megtartására augusztus 11-én, 12-én, 13-án, 16-án, 17-én és 18-án délután áll rendelkezésre idő, mégpedig naponként 15 óra 15 perctől 19 óráig. Szemináriumok azonban máskor is tarthatók.

Semmiféle tudományos programot sem terveztek augusztus 14-én (szombaton) délutánra és 15-re (vasárnapra).

A záróünnepség terv szerint augusztus 19-én délután lesz ismét a Kongresszusi teremben.

A Kongresszus idején matematikai könyvkiállítást is nyitnak a Kultúra és tudomány palotájában.

A Szervező Bizottságnak az a szándéka, hogy megfelelő szervezett és kötetlen társasági programmal egészíti ki a Kongresszus tudományos programját.

A szocialista országok állampolgárai zlotyban (zl) fizethetik mind a részvételi díjat, mind a Kongresszusi Iroda által felajánlott szolgáltatások árát.

A *részvételi díj*	1982. május 15. előtt	azután
rendes tagok számára	2800 zl	3750 zl
kísérő személyek számára	1400 zl	1900 zl.

Szállásköltség.

Azoknak a résztvevőknek, akik az „Orbis" Kongresszusi Irodáján keresztül foglalnak szobát, a következő összegű szállodafoglalási díjat kell fizetniük: a Lux Intercontinental kategóriától az I. A, B vagy C kategóriáig bezárólag 1200 zl-t, a többiekben pedig 600 zl-t.

Kategória	Egyágyas szoba		Kétágyas szoba	
	fürdőszobával	fürdőszoba nélkül	fürdőszobával	fürdőszoba nélkül
Lux Intercontinental	2480	—	2840	—
Intercontinental	1705	—	1990	—
I. A	1260	620	1870	1030
B	1175	—	1580	—
C	1080	—	1536	—
II. A, B, C	630—710	440	1030	840

Diákszállók: Az árak alacsonyabbak a fenti táblázatban találhatóknál, és a részvételi jelentkezést igazoló lapon közlik a pontos összeget.

A táblázat számadatai azt mutatják, hogy hány zlotyba kerülnek a szállodai szobák éjszakánként, reggelivel együtt a szocialista országok állampolgárainak. Az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Kongresszus bejegyzett résztvevői a Lux Intercontinental kategóriától az I. A, B vagy C kategóriáig bezárólag 15%-os engedményt kapnak a táblázatban feltüntetett árakból 1982. augusztus 9. és 20. között.

Az „Orbis" utazási iroda által *szervezett kirándulások* költsége személyenként:

1. Óváros	330 zl,
2. Wilanów	215 zl,
3. Lazienki	215 zl,
4. Lakodalom Lowiczban (egész napos)	858 zl,
5. Żelazowa Wola	825 zl,
6. Társasvacsora	528 zl,
7. Częstochowa (egész napos)	1485 zl,
8. Kazimierz—Majdanek (egész napos)	957 zl.

A Kongresszus utáni *túrák* résztvételi díja személyenként:

1. Bialowieża	3960 zl
2. Dél-Lengyelország	5660 zl + 1419 zl egyágyas szoba díjára
3. Tátra hegység	5995 zl + 941 zl egyágyas szoba díjára
4. Reneszánsz építőművészet	5850 zl + 1320 zl egyágyas szoba díjára
5. Észak-Lengyelország	5790 zl + 1716 zl egyágyas szoba díjára
6. Mazuri tavak	5030 zl + 759 zl egyágyas szoba díjára.

Kiszállítás az elutazáshoz.

Azoknak a személyeknek, akik azt kívánják, hogy egyénileg vigyék ki őket a szállodából a repülőtérre, jelentkezési lapjukba be kell írniuk a szükséges tájékoztatást: a repülőjárat számát, indulásának napját és pontos idejét. Ennek a szolgáltatásnak díja egyébként 495 zl.

Lapunknak azok az olvasói, akik részt óhajtanak venni az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson, bővebb felvilágosítás (a Kongressszus második tájékoztatójának — ez tartalmazza a jelentkezéshez szükséges űrlapot is —) igénylése céljából forduljanak írásban a Szervező Bizottsághoz, amelynek címét már fentebb megadtuk.

Közlemény az 5. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról

A Nemzetközi Matematikatanítási Bizottság (ICMI) elfogadta az Ausztrál Tudományos Akadémiának azt a javaslatát, hogy az 5. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszust (Fifth International Congress on Mathematics Education, rövidítve: ICME 5) Ausztráliában rendezzék. Ennek értelmében az ICME 5 az Adelaide-i Egyetemen, Dél-Ausztráliában lesz 1984. augusztus 24-től 30-ig.

Hogy a kongresszusi programban mi kapjon nagyobb nyomatékot, annak meghatározása az ICMI által kijelölt Nemzetközi Program Bizottság feladata, melynek elnöke Dr. M. F. Newman, az Ausztrál Állami Egyetem tanára.

A program előreláthatólag felöleli majd a tanítás minden szintjét és kiterjed az általános érdeklődésre számot tartó problémák megvitatására, figyelembe véve különböző kulturális távlatokat.

A Kongresszusnak egyik fő célkitűzése, hogy elősegítse résztvevői között mind a szakmai, mind a személyes kapcsolatfelvételt. A szervezők különösen törekszenek annak ösztönzésére, hogy a matematikatanítás területén működő munkacsoportok tagjai találkozzanak a Kongresszuson, és hogy a tengeren túli résztvevők meglátogassák ausztrál kollégáikat hazai oktatási intézményeikben.

A Kongresszus hivatalos nyelve angol. A fontos üléseken elhangzó előadásokat és felszólalásokat le fogják fordítani néhány nyelvre. Arról is gondoskodás történik, hogy a beküldött előadásszövegek tartalmi kivonatát vagy összefoglalását szintén lefordítsák néhány nyelvre. Ezeknek a nyelveknek a kiválasztása egyfelől a résztvevők igényeitől függ, másfelől attól, hogy milyen lehetőségek állnak majd rendelkezésre a Kongresszus előtt ezeknek a fordításoknak az elvégzéséhez. Jelenleg az az elgondolás, hogy a következő nyelvekre készülnek fordítások: francia, indonéz, japán, kínai, német, orosz és spanyol.

Az ICME 5 ausztrál Szervező Bizottsága úgy tervezi, hogy a Kongresszusra vonatkozó első tájékoztatóját 1982 májusában teszi közzé. Ez fontos általános felvilágosítással szolgál majd a leendő résztvevőknek. A második tájékoztató előreláthatólag 1983 májusában fog megjelenni. Ez részletes tudományos programot, kiegészítő tevékenységet és egy jelentkezési űrlapot tartalmaz. A második tájékoztatót automatikusan megkapják mindazok, akik válaszolnak az elsőre.

A Szervező Bizottság kéri a leendő résztvevőket, hogy ötleteikkel, javaslataikkal segítsék a Kongresszus tevékenységeit tervező munkájukat. Nagyra értékelik az olyan észrevételeket, amelyek az előbbi kongresszusok és más, hasonló jellegű nemzetközi rendezvények kedvező, illetőleg kedvezőtlen tapasztalataival kapcsolatosak. Különösen hasznosak az 1982 júliusa előtt megérkező válaszok.

A Szervező Bizottság címe:

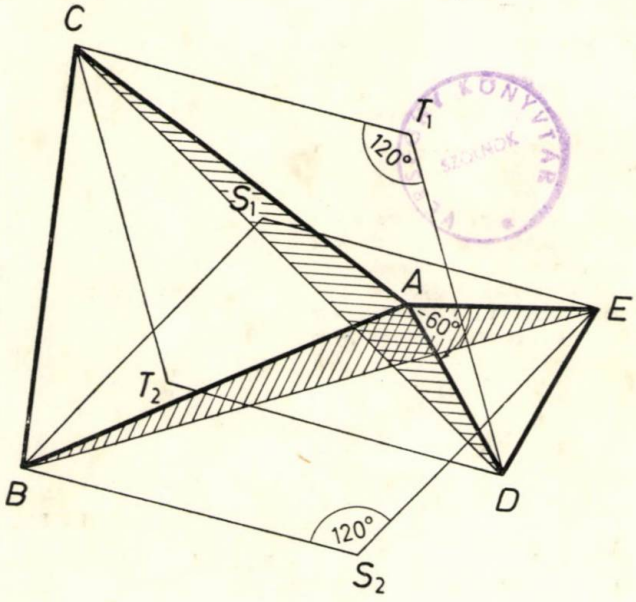
ICME 5,
Wattle Park Teachers' Centre,
424 Kensington Road,
WATTLE PARK, SOUTH AUSTRALIA 5066,
AUSTRALIA.

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



KÖNYVTÁR

982. május * XXIX. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-1539 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055. Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Hajdu Sándor: Az értelmi cselekvések elemzésének egy modellje a matematikaoktatásban 65
A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1981. évi verseny eredménye 69
Dr. Laczkovich Miklós: A Bolyai János Matematikai Társulat matematikatanárok számára meghirdetett versenyének feladatmegoldásai 69
Dr. Csirmaz László—Dr. Simonovits Miklós: Algoritmusok II. 75
Gádor Endréné: Beszámoló a CIEAEM 1981. évi találkozójáról 85
FELADATOK 88

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Хайду Шандор: Модел анализа умственных действий в преподавании математики 65
Результат соревнования 1981 года Математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 69
Д-р Лацкович Миклош: Решении задач соревнования Математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 69
Д-р Чирмаз Ласло—Д-р Шимонович Миклош: Алгоритмы II. 75
Гадор Эндренэ: Отчёт о свидании 1981 года Комитета CIEAEM 85
ЗАДАЧИ 88

INHALT

Dr. Hajdu, Sándor: Ein Modell der Analyse der intellektuellen Tätigkeiten im Mathematikunterricht 65
Die Resultate des Wettbewerbs der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer im Jahre 1981. ... 69
Dr. Laczkovich, Miklós: Die Aufgabenlösungen des Wettbewerbs der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 69
Dr. Csirmaz, László—Dr. Simonovits, Miklós: Algorithmen II. 75
Frau Piroska Gádor (geb.: *Kurtág*): Bericht über die Zusammenkunft der CIEAEM im Jahre 1981. 85
AUFGABEN 88

DR. HAJDU SÁNDOR
főiskolai docens
Nyíregyháza

Az értelmi cselekvések elemzésének egy modellje a matematikaoktatásban

(A matematikatanítás irányításáról II.)

„Fiam, fakó minden teória,
s a lét aranyló fája zöld."

(Goethe)

A tudomány egyik hatásos módszere, hogy elvonatkoztat a valóság konkrét sokszínűségétől, és néhány lényeges jegy kiemelésével rendszerezi, strukturálja a megfigyelt jelenségeket. Így jöttek létre pl. a biológiai, nyelvészeti rendszertanok. Születő tudományunknak is szüksége van ilyen rendszertanra, *a matematika tantárgypedagógiai taxonómiájára, amely vizsgálja a matematikai műveltséget közvetítő tananyagot, az oktatási folyamat mozzanatait, a pszichikumban bekövetkezett fejlődést, a tanulói teljesítményeket. Feladata, hogy feltárja a vizsgált jelenségek lényeges vonásait, kapcsolatait; rendszerezze, hierarchizálja azokat. A taxonómia eszközként szerepelhet a tananyag kiválasztásban, a tanulási folyamat tervezésénél, a tanulási célok, illetve a követelmények megfogalmazásánál, a tanulók értékelése során.*

A bemutatandó taxonómia az értelmi tartományt, az észleléssel, emlékezéssel, képzelettel, gondolkodással kapcsolatos tananyagtartalmakat, tanulási tevékenységeket, oktatási-képzési célokat vizsgálja három egymástól független dimenzióban.

A tanulási tevékenység összetettsége szerinti dimenzió

A különböző szinteket egy 5. osztályos anyagrész lehetséges tanulási mozzanataival szemléltetjük.

1. A mechanikus rögzítés, reprodukálás szintje

— A tanulóban ismételt használat során rögzül „a szakasz felezőmerőlegese" elnevezés és és helyesírása. Az ismételt szerkesztések, illetve észlelések következményeképp kialakul a szakasz felezőmerőlegese képzete.
— A „hogyan" kérdésre koncentrálva gyakorol egy szerkesztési eljárást.

Ezen a szinten rögzülnek az elnevezések, jelölések, az elemi matematikai fogalmak („kettő", „egyenes"), a mechanikus rutinok (táblázatok, eszközök használata); elemi számolási készségek alakulnak ki, fejlődik a memorizáló képesség. Az ismeretek a gondolkodás igénybevétele nélkül reprodukálhatók.

2. A megértésen alapuló elsajátítás, újrafogalmazás szintje

— A tanuló a tankönyv magyarázatát, szemléltetését követve (Matematika 5. 226. oldal) elsajátítja, hogy hogyan kell A és B ponttól 3 cm távolságra levő pontokat megszerkeszteni.
— Saját szavaival megfogalmazza és szemlélteti, hogy az adott A és B pontoktól 5 cm távolságra levő pontokat hogyan adunk meg. Helyesen válaszol a „miért" kérdésekre.

Miért összetettebb ez a tanulási munka az előzőnél? A tanulónak mozgósítania

kell már korábban megtanult ismereteket (pont, kör, távolság, a ponttól adott távolságra levő pontok halmaza, logikai „és", két halmaz közös része). A memória mellett megjelenik a gondolkodás: a jelenségek közti kapcsolatokat a tartalommal összhangban levő értelmi folyamatok tárják fel (megértés); a tanuló ezen értelmi cselekvések terveit rögzíti, és a gondolkodás segítségével fogalmazza újra a tanultakat.

Ez a szint a fogalmak, tételek, összefüggések elsajátításának a szintje. Kialakul az a képesség, hogy a tanuló ismeretlen, de nem idegen gondolatmeneteket követni, elsajátítani, újrafogalmazni tud.

3. *A megértésen alapuló, de önálló kiválasztást nem igénylő feladatmegoldás szintje*

— A tanuló (a ponttól, illetve az egyenestől adott távolságra levő pontok halmazát már ismeri) megoldja következő feladatot: A parkban a szökőkút az egyenes sétaúttól 2 m-re van. A kertész a királytól azt a parancsot kapja, hogy a kúttól 5 m-re ültesse el a rózsafát. A királynő azt kívánja, hogy a rózsafa az úttól 1 m-re legyen. Szerkeszd meg először azt a ponthalmazt, ahová az első, majd azt a ponthalmazt, ahová a második parancs szerint ültethetné a rózsafát. Hogyan teljesítheti mind a két parancsot?

Ezen a szinten különböző ismereteket, jártasságokat kapcsol össze a tanuló, miközben újabb fogalomrendszerek, cselekvési tervek és jártasságok alakulnak ki benne, ismeretrendszere bővül, dinamikusabbá válik. Kialakul az a képessége, hogy a matematikai gondolkozás irányítsa, szervezze tevékenységét, illetve a „külső" tevékenység eredményei hassanak gondolkodására.

4. *A problémamegoldás, alkotó alkalmazás szintje*

— A tanuló a tankönyv 226—228. oldalon levő feladatrendszere helyett a következő feladatot kapja:
Helyezzél el borsószemeket úgy, hogy az (előre megrajzolt) *A* és *B* pontoktól egyenlő távolságra legyenek! Kutasd fel az összefüggéseket! Bizonyítsd állításaidat! Dolgozzál ki szerkesztési eljárást!
— Vegyél fel egy egyenest és rajta kívül egy pontot! Szerkessz négyzetet, amelynek egyik csúcsa az adott pont, és egyik átlója az adott egyenesen van! (Matematika 5. 237. oldal, 12. feladat.)

A feladatmegoldás külső feltételei: az adatok, tények, feltételek; az ismeretlenek, célok; a cselekvési utasítások, útmutatások. *A belső feltételek:* az alkalmazásképes ismeretrendszerek, cselekvési programok, jártasságok; motiváltság, akarati tényezők stb. *Problémahelyzetről beszélünk, ha a feladatmegoldás külső feltételeiben bizonytalansági tényezők bújnak meg, illetve a belső feltételek hiányosan adottak, és emiatt ellentmondás alakul ki.* A problémamegoldás során a tanuló átépíti értelmi struktúráját, a külső feltételekhez igazítva átcsoportosítja ismereteit, kapcsolatba hoz eddig idegen fogalmakat, cselekvési terveket; új fogalmak, cselekvési programok alakulnak ki benne. Feloldható az ellentmondás úgy is, hogy a tanuló a külső feltételeket igazítja az értelmi struktúrájához: felkutatja a hiányzó adatokat, átfogalmazza a cselekvési útmutatást, elemzi a feltételeket, részcélokat tűz ki stb. A problémamegoldás folyamatában alakul ki és fejlődik a matematikai intelligencia.

A hagyományos oktatás a 2., 3., 4. szinten folyó tanulást időben egymás után oldotta meg (tanári magyarázat, típusfeladatok gyakorlása, problémamegoldás). Az új matematikaoktatás egyik legalapvetőbb felismerése, hogy a magasabb szintek magukban foglalhatják az alacsonyabbakat, pl. az alkotó alkalmazás szintjén folyó „felfedeztető" tanulás melléktermékeként rögzülnek az ismetek, kiépülnek a fogalmi struktúrák, kialakulnak a jártasságok is. Ezért az új matematikaoktatás a tanulási folyamat döntő hányadában a 4. szinten dolgozik, és a fokozatosság elvét, a differenciálást az alább bemutatandó dimenzióban érvényesíti.

A matematikai tevékenység absztrakciós szintjei

A gyermekre, illetve az alkotó matematikusra egyaránt jellemző, hogy matematikai tevékenységében különböző „egzaktsági", „absztrakciós" szinteket különíthetünk el. Egy ötödik osztályos feladat lehetséges megoldásaival szemléltetjük mondandónkat.

Példa: Térképvázlatot láthatsz a kincses szigetről. A kincs a magányos tölgyfától és a sziklától egyenlő távolságra, a tengertől pedig olyan messze van, mint amekkora M és S távolsága. Keresd meg a kincset!

1. Viszonylag konkrét elemekkel a logikai rendezés és általánosítás igénye nélkül dolgozik. Kísérletezgető szakasz:

A konkrét térképvázlaton — körzővel méricskélve — elhelyez egy borsószemet úgy, hogy a feltételeknek eleget tesz.

2. A kísérletezgetésből indul ki, de megjelenik a logikai rendezés, általánosítás:

Elemzés után az egyik feltételt figyelembe véve az egyenes partszakasszal párhuzamosan borsószemeket rak ki; erre támaszkodva rajzos vázlatot készít, majd csúsztatással megrajzolja a párhuzamos egyenest. Ezen az egyenesen méricskéléssel megjelöli a keresett pontot.

3. Támaszkodik a konkrét interpretációra, de a logikai rendezés, általánosítás döntő szerepre jut, megjelenik a dedukció:

Rajzolgatva megkeres néhány pontot, amelyik az egyik, illetve a másik feltételnek eleget tesz. Erre támaszkodva megoldási tervet készít, majd precíz szerkesztést végez, végül igazolja megoldását.

4. Az általánosítás és logikai rendezés teljessé válik, viszonylag absztrakt elemekkel dolgozik, döntő szerepet kap a dedukció:

A feladat feltételeit elemezve aktivizálja a szükséges mértani helyek fogalmát, így deduktív úton jut el a megoldási tervhez. Precíz szerkesztést és igazolást ad. A dedukció lehetővé teszi, hogy a feltételek variálásával olyan megoldásokhoz is eljusson, amelyek nem következnek a konkrét vázlatból (párhuzamos egyenespár, térgeometriai megoldás).

Hangsúlyoznunk kell a „konkrét", illetve az „absztrakt" viszonylagosságát. Az óvodás gyermeknél a konkrétumot a kézbe adott tárgyak, az absztraktot a tárgyakat helyettesítő ujjak, később a természetes számok jelentik, míg néhány év múlva ezek a számok konkrét elemekként jelennek meg. Ezért a gyakorló tanárnak kell feltárnia a konkrét pedagógiai helyzetre jellemző ténylegesen meglevő, illetve elérhető absztrakciós szinteket.

Ha a két dimenziót együttesen alkalmazzuk, akkor a didaktikai jelenségeket sokkal árnyaltabban írhatjuk le: Például a tankönyv (225—235. oldal) feldolgozása milyen munkát vár el a tanulótól? Az elemzések azt mutatják, hogy a tevékenység összetettsége szerint alacsony, a 2. szint dominál, csak helyenként jut el a 3., 4. szintre. Viszont a feladatok, magyarázatok absztrakciós szintje túl magas, 3., 4. szint. Ez arra figyelmeztet, hogy a tankönyv feldolgozása helyett olyan feladatrendszert kell szerkesztenie a tanárnak, amely a tárgyi tevékenységből indul ki, és amelyben a problémamegoldó tanulás kerül előtérbe.

A matematikai tevékenység begyakorlottsága szerinti dimenzió

A tevékenységben az összetett pszichikus folyamatok szintéziseként viszonylag tartós állapotok, majd ezek rögzítődésével állandósult tulajdonságok fejlődnek ki a tanulóban. Ez a fejlődés a tevékenység optimalizálódását vonja maga után (kevesebb hibával, gyorsabban, kisebb erőbefektetéssel dolgozik a tanuló).

0. Előkészítettség szintje: A tanulás során kialakulnak olyan tudáselemek, amelyek még nem mozgósíthatók, de a további tanulásban időmegtakarítást jelentenek. Megfelelő élményalap felhalmozása előkészítheti egy-egy fogalom kialakulását, egy-egy összefüggés felismerését. Egyes jártasságok kialakításakor — a transzfer figyelembevételével — más jártasságok kialakulását is megalapozhatjuk.

1. Az ismerősség szintje: Ide sorolandók azok az ismeretek, amelyeket csak

külső segítséggel képes reprodukálni, újrafogalmazni a tanuló; a fogalmak tartalma igen szegény, a fogalomrendszer még nem kellően szilárd, ugyanakkor merev, nehezen mozgósítható; nem látja át a cselekvés egészét a tanuló, ezért hibázik, elakad.

2. *A jártasság szintje:* Már viszonylag tartós ismeretek, cselekvési programok, jártasságok alakulnak ki, de ezek működése még nem optimális. Az elnevezések, szimbólumok jelentését érti, de nem használja automatikusan; az ismeretek viszonylag szilárdabbak, a fogalmak tartalma bővül, de aktivizálásukhoz a gondolkodási műveletek intenzív igénybevétele szükséges. A feladatmegoldás menetét már egészében átlátja, de a kritikus mozzanatokat intenzív figyelemmel végzi, így nem tud felkészülni a következő lépésre. A problémamegoldás során önállóan végzi az elemzést, készíti el a megoldási tervet, de stratégiája még nem kiforrott, nagy szerepet kaphat a véletlen próbálkozás; zsákutcába vezető megoldási javaslat után nehezen rendezi át terveit, „tapad" a hibás elképzeléshez.

3. *A maximális begyakorlottság szintje:* Az ismeretek, fogalmak szinte automatikusan mozgósíthatók, gondolkodás nélkül megérti és alkalmazza a matematikai jelrendszert, terminológiát, a nyelv logikai elemeit, átfogja a definíciók, tételek logikai szerkezetét, következésképp ismereteit könnyedén átfogalmazza a tanultaktól eltérő formába. A törvényszerűségeket erősen zavaró körülmények között is felismeri, alkalmazza. A feladatmegoldás gyors, gördülékeny, a tevékenység rugalmasan átalakítható, lerövidíthető. A kifejlődő képességek, kreatív tulajdonságok szilárdan beépülnek a matematikai intelligenciába. Nagy gyakorlatot mutat a problémahelyzet elemzésében, az adatok, feltételek, eredmények, célkitűzések értékelésében, variálásában, átfogalmazásában stb. Ismeretrendszere, megoldási stratégiái szilárdak, ugyanakkor automatikusan átrendezhetők. Több lépésben előre látja a tevékenység eredményét, ezért a vak próbálkozásokat felváltja a problémahelyzet tervszerű felgöngyölítése.

Összefoglalva: Taxonomikus modellünk a matematikai tevékenység fejlettségét három egymástól független dimenzióban elemzi. A különböző dimenziók egyidejű alkalmazásával igen pontosan fogalmazható meg a cél- és követelményrendszer, sokoldalúan tervezhető a tanulási folyamat irányítása, árnyaltan leírhatók a tanulói teljesítmények. Látnunk kell viszont azt is, hogy modellünk, mint minden modell, amellett, hogy feltárja a rejtett kapcsolatokat, összefüggéseket, el is szürkíti, mintegy leegyszerűsíti vizsgálata tárgyát. Ezért — bár hatásos eszközzé válhat — sohasem helyettesítheti a konkrét pedagógiai helyzet ismeretét, a jártasságot, tapasztalatokat.

IRODALOM

[1] DIENES Z.: *Az absztrakcióról és az általánosításról.* Magyar Pszichológiai Szemle 1961. 318—329. oldal.
[2] KÁDÁRNÉ FÜLÖP J.: *Taxonómia a pedagógiában.* Pedagógiai Szemle 1971. 314. oldal.
[3] NAGY JÓZSEF: *Köznevelés és rendszerelmélet.* OOK. 185—208. oldal.
[4] NAGY SÁNDOR: *Didaktika.* Tankönyvkiadó, Bp. 1969. 37—53. oldal.

A Bolyai János Matematikai Társulat által a matematikatanárok számára rendezett 1981. évi verseny eredménye

16 tanár összesen 112 feladat megoldását küldte be. A versenybizottság értékelése alapján

I. díjat (3500 Ft-ot) nyert: **Matolcsy Kálmán**, a debreceni Irinyi János Élelmiszeripari Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanára;

II. díjat (2000 Ft-ot) nyert: **Bartha Gábor**, a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium tanára;

III. díjat (1000—1000 Ft-ot) nyert: **Bogdán Zoltán**, a ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium és **Csörsz Sándor**, a Dunakeszi Gimnázium tanára.

1. dicséretben (és 500—500 Ft-os jutalomban) részesültek: **Fatalin László**, a budapesti Bordás András Ipari Szakmunkásképző Intézet; **Jarábik Béla**, az ócsai Bolyai János Gimnázium és **Somogyi László**, a budapesti I. István Gimnázium tanára.

2. dicséretet kapott: **Laczkó László**, a budapesti I. István Gimnázium és **Náfrádi Ferenc**, a győri Kossuth Lajos Ipari Szakmunkásképző Intézet tanára.

DR. LACZKOVICH MIKLÓS
egyetemi adjunktus
Budapest

A Bolyai János Matematikai Társulat matematikatanárok számára meghirdetett versenyének feladatmegoldásai

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan $R(x)$ racionális törtfüggvény, amelyre $R(x)=\sin x$ teljesül minden valós x-re!

Megoldás. Legyen $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, ahol P és Q polinomok, $Q(x)\neq 0$. Ha $P(x)\equiv 0$, akkor $R(x)\equiv 0$ és így $x\neq k\pi$ esetén $R(x)\neq\sin x$. Ha $P(x)\not\equiv 0$, akkor P-nek csak véges sok gyöke van, míg $\sin x$ minden $k\pi$ alakú pontban eltűnik, tehát van olyan $x=k\pi$ pont, amelyben $R(x)\neq\sin x$.

2. Tegyük fel, hogy

$$c_1 e^{t_1 x}+c_2 e^{t_2 x}+\ldots+c_k e^{t_k x}=0 \tag{1}$$

minden valós x-re! Mutassuk meg, hogy ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ mind különbözőek, akkor $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$.

Megoldás. Feltehetjük, hogy $t_1<t_2<\ldots<t_k$. Osszuk el (1)-et $e^{t_k x}$-szel:

$$c_1 e^{(t_1-t_k)x}+\ldots+c_{k-1}e^{(t_{k-1}-t_k)x}+c_k=0. \tag{2}$$

Mivel $t_i-t_k<0$ $(i=1, \ldots, k-1)$, ezért $x\to\infty$ esetén (2) bal oldalán minden tag határértéke 0, kivéve a c_k konstans tagot. Ezért $c_k=0$. Ha most (1)-et $e^{t_{k-1}x}$-szel osztjuk, akkor (felhasználva, hogy $c_k=0$) ugyanúgy beláthatjuk, hogy $c_{k-1}=0$. Az okoskodást folytatva, $c_{k-2}=\ldots=c_1=0$.

3. Tegyük fel, hogy f mindenütt értelmezve van és kielégíti az $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ függvényegyenletet! Mutassuk meg, hogy ha $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c$, akkor $f(x)\equiv cx+a$ alkalmas a-ra!

Megoldás. Legyen $g(x)=f(x)-f(0)$. Megmutatjuk, hogy $g(x+y)=g(x)+g(y)$ teljesül minden valós x, y-ra. Valóban, a feladat feltétele alapján

$$g\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)=f\left(\frac{x+0}{2}\right)-f(0)=\frac{f(x)+f(0)}{2}-f(0)=$$

$$=\frac{f(x)-f(0)}{2}=\frac{g(x)}{2}.$$

Ebből

$$g(x+y)=2g\left(\frac{x+y}{2}\right)=2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(0)\right)=2\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}-f(0)\right)=$$

$$=[f(x)-f(0)]+[f(y)-f(0)]=g(x)+g(y).$$

Ebből következik, hogy $g(nx)=ng(x)$ minden valós x és természetes n esetén. Ezt indukcióval láthatjuk be: $n=1$-re az állítás nyilvánvaló, ha pedig n-re igaz, akkor

$$g((n+1)x)=g(nx+x)=g(nx)+g(x)=ng(x)+g(x)=(n+1)g(x).$$

A feladat másik feltétele szerint

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c.$$

Ezért, ha x tetszőleges, rögzített pozitív szám, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(nx)}{nx}=c.$$

Az előzőek szerint $\frac{g(nx)}{nx}=\frac{ng(x)}{nx}=\frac{g(x)}{x}$, tehát $\frac{g(x)}{x}=c$, azaz $g(x)=cx$ minden $x>0$-ra. Ez negatív x-ekre is igaz, hiszen $0=g(0)=g(x+(-x))=g(x)+g(-x)$, tehát $g(-x)=-g(x)=-cx$. Ezért $f(x)=g(x)+f(0)=cx+f(0)$ teljesül minden x-re, és ezt kellett bizonyítani.

4. Mutassuk meg, hogy ha f egész függvény, akkor minden korlátos (a, b) intervallum felbontható véges sok olyan részintervallumra, amelyek mindegyikében f vagy monoton növő, vagy monoton fogyó!

Megoldás. A megoldáshoz szükségünk lesz arra a tételre, amely szerint egy f egész függvény minden pont körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \tag{3}$$

teljesül minden c-re és x-re. (A teljesség kedvéért ezt be is bizonyítjuk a megoldások után.)

Ebből következik (és a megoldásban erre lesz szükségünk), hogy ha az f egész függvénynek az $[a, b]$ intervallumban végtelen sok gyöke van, akkor f azonosan 0. Valóban, a Bolzano—Weierstrass-tétel szerint f gyökeinek van egy c torlódási pontja. Ekkor f folytonossága alapján $f(c)=0$. Megmutatjuk, hogy $f^{(k)}(c)=0$ is teljesül minden $k=1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel ugyanis, hogy $f^{(n)}(c)\neq 0$ valamilyen n-re, és legyen n a legkisebb ilyen természetes szám. Ekkor (3) szerint

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k=(x-c)^n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(n+i)}(c)}{(n+i)!}(x-c)^i=(x-c)^n\cdot g(x),$$

ahol $g(x)$-szel jelöltük a $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(n+i)}(c)}{(n+i)!}(x-c)^i$ hatványsor összegét. Mivel ez a hatványsor mindenütt konvergens (hiszen (3) jobb oldala is ilyen volt), ezért g is egész függvény. Így g mindenesetre folytonos, és $g(c)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\neq 0$ alapján $g(x)\neq 0$ a c pont egy alkalmas környezetében. Ezért ebben a környezetben (az $x=c$ pont kivételével) $f(x)=(x-c)^n\cdot g(x)\neq 0$, ami lehetetlen, mert ekkor c nem lehetne f gyökeinek torlódási pontja. Ezzel beláttuk, hogy f minden deriváltja eltűnik a c pontban. Ebből (3) alapján már valóban következik, hogy f azonosan 0.

Ezek után a feladat megoldása a következő. Ha f egész függvény, akkor a deriváltja, f' is az. Ha f'-nek az $[a, b]$ intervallumban végtelen sok gyöke van, akkor a fentiek szerint $f'\equiv 0$, tehát f konstans. Ezért ebben az esetben f (nem szigorúan) monoton az $[a, b]$ intervallumban. Ha viszont f'-nek csak véges sok gyöke van $[a, b]$-ben, akkor ezek az $[a, b]$ intervallumot véges sok részintervallumra osztják. Ezekben a részintervallumokban f' állandó előjelű, mert különben (Darboux vagy Bolzano tétele szerint) f'-nek gyöke volna egy intervallum belsejében. Ezért ezekben az intervallumokban f monoton, és ezt kellett belátni.

5. Mutassuk meg, hogy ha f mindenütt értelmezett, akárhányszor deriválható, és $f^{(n)}(x)\geqq 0$ minden n-re és minden valós x-re, akkor f egész függvény!

Megoldás. Legyen a tetszőleges rögzített pozitív szám, és legyen $b>a$. A Lagrange-féle maradéktaggal felírt Taylor-formula szerint minden n-re van olyan $a<c_n<b$, amelyre

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(b-a)^n.$$

A feladat feltétele szerint $f^{(n)}(c_n)\geqq 0$, és ezért

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\leqq f(b) \tag{4}$$

minden n-re. A $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ sor tagjai nemnegatívak, és részletösszegei (4) szerint felülről korlátosak. Ezért ez a végtelen sor konvergens, tehát a tagjai 0-hoz tartanak:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k=0 \tag{5}$$

minden $0<a<b$ esetén.

Legyen most x tetszőleges, 0-tól különböző valós szám! Ismét felhasználva a Taylor-formulát, minden n-re találunk olyan 0 és x közé eső y_n számot, amelyre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(y_n)}{n!} x^n. \tag{6}$$

Az $f^{(n)}$ függvény minden n-re monoton növő, mert a deriváltja, $f^{(n+1)}$ nemnegatív. Ezért $0 \leqq f^{(n)}(y_n) \leqq f^{(n)}(|x|)$, és

$$\left| \frac{f^{(n)}(y_n)}{n!} x^n \right| \leqq \frac{f^{(n)}(|x|)}{n!} |x|^n$$

minden n-re. Itt a jobb oldal $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart (alkalmazzuk (5)-öt $a = |x|$, $b = 2|x|$ választással), tehát

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(y_n)}{n!} x^n = 0.$$

Ezért (6) alapján megállapíthatjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

minden x-re (az $x = 0$ eset nyilvánvaló), tehát f valóban egész függvény.

6. Mutassuk meg, hogy ha f mindenütt differenciálható, $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$ és $\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,dt = 0$, akkor $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Megoldás. Az állításnál többet fogunk bizonyítani. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $f'(x)$ korlátos valahonnan kezdve:

$$|f'(x)| \leqq K \quad (x > x_0),$$

és a véges $\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,dt = c$ határérték létezik, akkor $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és legyen x_1 olyan nagy, hogy $x > x_1$ esetén

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt - c \right| < \frac{\varepsilon^2}{8K}. \tag{7}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x > \max(x_0, x_1).$$

Tegyük fel, hogy volna olyan $x > \max(x_0, x_1)$, amelyre $|f(x)| \geqq \varepsilon$, és legyen például $f(x) \geqq \varepsilon$ (hasonlóan okoskodhatunk, ha $f(x) \leqq -\varepsilon$). Ha $t > x$, akkor a Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $x < z < t$, amelyre

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(z) \geqq -K,$$

és ezért

$$f(t) \geqq f(x) - K(t - x) \geqq \varepsilon - K(t - x).$$

Legyen $x'=x+\frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor $x<t\leqq x'$ esetén

$$f(t)\geqq\varepsilon-K(x'-x)=\varepsilon-K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}=\frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$\int_x^{x'} f(t)\,dt\geqq\frac{\varepsilon}{2}(x'-x)=\frac{\varepsilon^2}{4K}.$$

Ez azonban lehetetlen, mert $x'>x>x_1$, tehát (7) szerint

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt-c\right|<\frac{\varepsilon^2}{8K},\quad \left|\int_0^{x'} f(t)\,dt-c\right|<\frac{\varepsilon^2}{8K},$$

és ezért

$$\left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|=\left|\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{x'} f(t)\,dt\right|<2\cdot\frac{\varepsilon^2}{8K}=\frac{\varepsilon^2}{4K}.$$

7. Tegyük fel, hogy f egész függvény, és minden x-re van olyan n természetes egész, hogy $f^{(n)}(x)=0$. Mutassuk meg, hogy f polinom! (A feladat úgy értendő, hogy $n=n(x)$, egyébként a feladat triviális!)

Megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy van olyan n természetes szám, és olyan I intervallum, hogy $f^{(n)}(x)=0$ minden $x\in I$-re.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz! Ekkor $f'(x)$ nem azonosan 0, és mivel folytonos, ezért van olyan I_1 zárt intervallum, hogy $x\in I_1$ esetén $f'(x)\neq 0$. Mivel $f''(x)$ nem azonosan 0 az I_1 intervallumban, és itt folytonos, ezért van olyan $I_2\subset I_1$ zárt intervallum, amelyben $f''(x)\neq 0$. Az eljárást folytatva, minden n-re találunk egy zárt I_n intervallumot úgy, hogy $I_1\supset I_2\supset\ldots$, és $x\in I_n$ esetén $f^{(n)}(x)\neq 0$. A Cantor-axióma szerint $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\neq\emptyset$; legyen x egy közös pont. Ekkor $f^{(n)}(x)\neq 0$ minden $n=1, 2, \ldots$ -re ami ellentmond a feladat feltételének. Ezzel beláttuk, hogy első állításunk valóban igaz; van olyan n, hogy $f^{(n)}$ eltűnik egy intervallumban. Mivel $f^{(n)}$ egész függvény, ezért a **4.** feladat megoldása előtti megjegyzésből következik, hogy ekkor $f^{(n)}(x)\equiv 0$, tehát f (legfeljebb n-edfokú) polinom.

8. Tegyük fel, hogy f mindenütt értelmezve van és kielégíti az alábbi függvényegyenletet:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y). \tag{8}$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor vagy $-1\leqq f(x)\leqq 1$ teljesül minden x-re, vagy $f(x)\geqq 1$ teljesül minden x-re! (f-ről semmilyen folytonossági feltételt nem tettünk fel!)

Megoldás. Feltehetjük, hogy $f\not\equiv 0$. Legyen a olyan szám, amelyre $f(a)\neq 0$, és alkalmazzuk a függvényegyenletet az $x=a, y=0$ helyettesítéssel:

$$f(a)+f(a)=2f(a)\cdot f(0),\quad \text{amitől}\quad f(0)=1.$$

(8)-ba $y=x$-et helyettesítve:

$$f(2x)+1=2f^2(x), \tag{9}$$

amiből (x helyébe $\frac{x}{2}$-et írva)

$$f(x)\geqq -1 \tag{10}$$

következik minden x-re.

Ha most (8)-ban x helyett $(x+y)-t$, y helyett $(x-y)$-t írunk, akkor $f(2x)+f(2y)=$ $=2f(x+y)\cdot f(x-y)$ adódik, amiből, (9)-et felhasználva és átrendezve, a

$$f(x+y)\cdot f(x-y)=f^2(x)+f^2(y)-1 \tag{11}$$

egyenlőséget kapjuk. Emeljük négyzetre (8) mindkét oldalát, és az így kapott egyenlőségből vonjuk ki (11) 4-szeresét:

$$\begin{aligned}[f(x+y)-f(x-y)]^2 &= f^2(x+y)+f^2(x-y)-2f(x+y)\cdot f(x-y)= \\ &= 4f^2(x)\cdot f^2(y)-4f^2(x)-4f^2(y)+4= \\ &= 4(f^2(x)-1)(f^2(y)-1).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$(f^2(x)-1)(f^2(y)-1)\geqq 0 \tag{12}$$

minden x-re és y-ra. Ha van olyan y, amelyre $|f(y)|<1$, akkor (12)-ből következik, hogy $f^2(x)-1\leqq 0$, azaz $|f(x)|\leqq 1$ teljesül minden x-re; ekkor tehát a feladat állítása igaz. Ha $|f(y)|\geqq 1$ minden y-ra, akkor (10) alapján vagy $f(y)\geqq 1$, vagy pedig $f(y)=-1$ áll minden y számra. Azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben $f(y)=-1$ nem lehetséges. Valóban, $f(y)=-1$ esetén (9)-et $x=\frac{y}{2}$-re alkalmazva

$$0=f(y)+1=2f^2\left(\frac{y}{2}\right),$$

azaz $f\left(\frac{y}{2}\right)=0$ adódna. Ez azonban lehetetlen, mert előző állításunk szerint f nem vehet fel -1 és 1 közötti értékeket. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Matolcsy Kálmán (Debrecen) megmutatta, hogy a feladat állítása gyengébb feltételekből is következik: elég feltenni (9)-et és azt, hogy $f(x)\cdot f(y)\geqq -1$ bármely x, y valós számra.

Többen észrevették, hogy a $\cos(cx)$ és $\operatorname{ch}(cx)$ függvények mind kielégítik a (8) egyenletet. Meg lehet mutatni, hogy (8) összes megoldása a következő:

(a) $f(x)\equiv 0$,

(b) $f(x)=\operatorname{ch}(g(x))$, ahol g kielégíti a $g(x+y)=g(x)+g(y)$ függvényegyenletet, továbbá

(c) $f(x)=\cos(g(x))$, ahol $g(x+y)-g(x)-g(y)$ 2π egész számú többszöröse minden x, y-ra.

A **4.** *feladat megoldásában felhasznált tétel bizonyítása.* Legyen $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ekkor $f^{(k)}(c)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n c^{n-k}$, tehát a binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-c)+c)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}(x-c)^k\cdot c^{n-k}= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n c^{n-k}\right)(x-c)^k= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.\end{aligned}$$

Itt a végtelen sor átrendezése azért volt jogos, mert az illető sor abszolút konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_n|\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}|x-c|^k\cdot|c|^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x-c|+|c|)^n$$

konvergens, hiszen a feltétel szerint a $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ sor egész függvényt állít elő, tehát mindenütt *abszolút* konvergens (lásd a cikk* **3.** tételének bizonyítását!).

DR. CSIRMAZ LÁSZLÓ—DR. SIMONOVITS MIKLÓS
tudományos munkatárs egyetemi docens
Budapest

Algoritmusok II.

Cikkünk előző részét számok sorbarendezésére szolgáló algoritmusok ismertetésével zártuk. Most először néhány további algoritmust ismertetünk, majd pár szót ejtünk az algoritmusok általános, igen szerteágazó elméletéről.

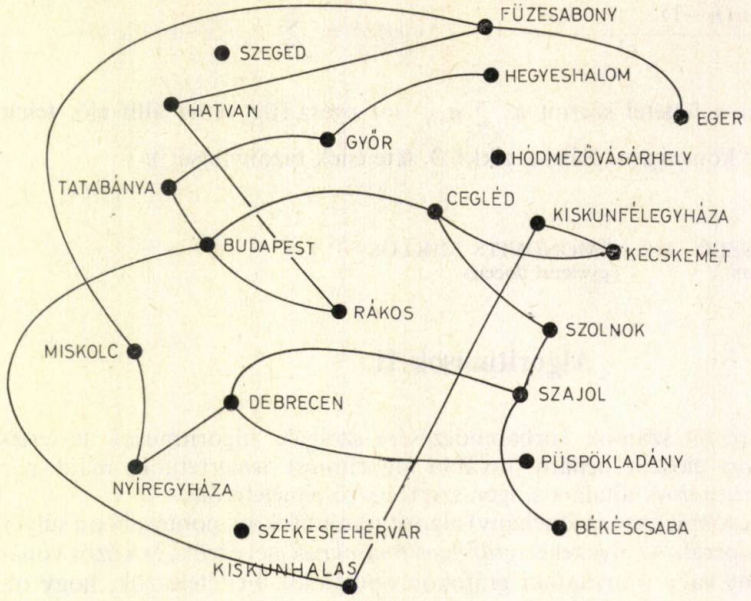
Az alábbi (és a későbbiekben is jónéhány) algoritmus gráfokon, pontosabban súlyozott élű gráfokon operál. Az ilyeneket *gráfalgoritmusoknak* nevezzük, és közös vonásuk, hogy irányított vagy irányítatlan gráfokon operálnak. Feltételezzük, hogy olvasóink egy része nem igazán otthonos a gráfelméletben, ezért igyekszünk úgy fogalmazni, hogy az elméletben járatlan olvasó is „élvezhesse" algoritmusaink szépségét.

Ha adottak bizonyos objektumok, melyek között egy R kapcsolat fennállhat, akkor az objektumok és a kapcsolat leírására gráfokat szoktunk használni. Lehetnek például az objektumok Magyarország városai és községei, az R kapcsolat pedig a „közvetlen úttal összekötöttség". Ilyenkor a településeket pontokkal (a gráf *csúcsaival*) ábrázoljuk, és két ilyen pontot összekötünk egy vonallal (amelyik tetszőleges girbe-gurba vonal is lehet), ha van közöttük olyan út, amelyik más településen nem megy át. Hasonlóan gráfot kapunk, ha Európa nagyvárosait vesszük gráfunk csúcsainak, és kettőt akkor kötünk össze, ha van közvetlen repülőjárat közöttük. Ha Budapest úthálózatát szeretnénk gráffal ábrázolni, irányított és irányítatlan vonalakat is kell használnunk, hiszen vannak egyirányú útjaink is. Egy bonyolult vegyipari folyamat leírásánál a különböző fázisokban fellépő termékeket választhatjuk gráfunk pontjainak, majd kettőt ezek közül irányított vonallal (nyíllal) kötünk össze, ha az egyik termékből a másikat közvetlen eljárással nyerjük.

Az 1. ábrán Magyarország villamosított vasúthálózatának egy része látható. Az ábra nagyon sok, vasúti szempontból fontos adatot elhanyagol: például a távolságok, az irányok helytelenül vannak feltüntetve. Olyan vasútvonalak is keresztezik egymást, amelyek a valóságban egymástól távol esnek. Ugyanakkor több információ leolvasható róla. Észrevehetjük például, hogy Szegedre**, Székesfehérvárra, Hódmezővásárhelyre nem juthatunk el csak villamosított vonalat használva. Azt is észrevehetjük, hogy Egerbe csak Füzesabonyon keresztül juthatunk el. Leolvasható az is, hogy ha a Budapest—Hatvan vasútvonal megrongálódna, még mindig eljuthatnánk Egerbe villamosított vonalon a Debrecen—Miskolc—Füzesabony útvonalon. További információhoz jutnánk, ha minden vasúti szakasz mellé odaír-

* DR. LACZKOVICH MIKLÓS—DR. SIMONOVITS MIKLÓS: Analitikus függvények a középiskolában. A Matematika Tanítása XXVIII. évf. (1981). 2. szám 35—45. oldal.

** A Budapest—Szeged közötti villamosított vasútvonalat teljes hosszúságában e cikk megírása után adták át a forgalomnak. (A szerkesztő.)



1. ábra

nánk annak hosszát; vagy a szakasz megtételéhez a gyorsvonat másodosztályú jegy árát. Az olyan gráfokat, ahol az élekre számokat is írunk, *súlyozott élű gráfoknak,* néha hálózatoknak nevezzük.

Ez az illusztráció jól motivál bizonyos gráfelméletei fogalmakat. Egy gráfban izolált csúcsnak nevezzük az olyan csúcsokat, amelyek nincsenek semmilyen más ponttal összekötve. Ilyenek például Szeged, Székesfehérvár és Hódmezővásárhely. Ha ezeket kihagyjuk, akkor egy *összefüggő* gráfhoz jutunk, azaz egy olyan gráfhoz, amelyben mindenhonnan mindenhová eljuthatunk az élek mentén. Ha egy gráfban van izolált pont, akkor az nem lehet összefüggő, de ha nincs benne izolált pont, akkor még mindig előfordulhat, hogy nem összefüggő. Például ha 3 új villamosított vasútvonalat építünk Szeged, Székesfehérvár és Hódmezővásárhely között, attól még mindig nem fogunk tudni eljutni Pestről Szegedre villamosított vonalon. Egy gráfban egy pont *fokszámának* nevezzük az adott ponthoz csatlakozó élek számát. Így például Békéscsaba, Püspökladány foka 1, Nyíregyháza, Kiskunfélegyháza foka 2, Füzesabonyé pedig 3.

A gráfelméleti algoritmusok általános vonása, hogy egy (irányított vagy irányítatlan) gráfon dolgoznak, s annak valamilyen gráfelméleti nyelven könnyen megfogalmazható részét vagy tulajdonságát keresik. Például azt, hogy összefüggő-e a gráf (bármely pontjából bármely pontjába az élek mentén el lehet-e jutni), vagy hogy a gráf síkba rajzolható-e. Van-e a gráfban kör (azaz egymáshoz csatlakozó élekből álló útvonal, amelynek kezdő- és végpontja azonos, de az útvonalnak több közös pontja nincs)? Ha van kör, akkor van-e olyan kör is, mely az összes csúcson átmegy (ún. *Hamilton-kör*). Ezek az algoritmusok igen fontosak a gyakorlatban, talán elég megemlíteni, hogy a következő, ún. *ütemezési feladatot* is lényegében egy gráfokra vonatkozó algoritmussal lehet megoldani. Tegyük fel, hogy egy építkezés ütemtervét kell elkészítenünk. Az építkezés sok különböző részfeladatból áll, melyek közül bizonyosak csak mások elkészülte után kezdhetők el (például falat húzni csak az alapok elkészülte után lehet), míg egy sor más tevékenységet egyszerre is lehet végezni

(például a víz- és villanyszerelést). Minden egyes részfeladatról tudjuk, hogy mennyi ideig tart. Hogyan kell szerveznünk az építkezést, hogy az a lehető leghamarabb elkészüljön? Mik lesznek azok a kritikus feladatok, amelyek csúszása az egész építkezés elhúzódásához vezet, s mik azok, melyeknél van bizonyos rátartás?

Az általunk elsőként tárgyalandó feladat az egyszerűbbek közül való, a következőképpen fogalmazható meg.

Telefonhálózat tervezése

Telefonhálózatot szeretnénk építeni adott $K_1, K_2, \ldots, K_n$ községek között úgy, hogy bármely községből bármelyikbe lehessen (esetleg több más községen keresztül) telefonálni. Ehhez tudjuk, hogy az i-edik és a j-edik község között a telefonkábel lefektetése $F_{i,j}(=F_{j,i})$ forintba kerül. (Ha már volna telefonvonal, akkor $F_{i,j}=0$.) Hol kell a kábeleket lefektetni, hogy az a lehető legkevesebbe kerüljön?

Gráfokra átfogalmazva a feladatot adott egy n szögpontú teljes gráfunk, és minden e élre adott egy nemnegatív $w(e)$ *súly* (vagy más néven *költség*). A feladat az, hogy keressünk olyan részfát (azaz a teljes gráfnak olyan minimális összefüggő részét), amelynek súlya (vagy költsége) minimális.*

A feladatot triviálisan megoldhatjuk úgy, hogy valamilyen ravasz módszerrel felsoroljuk az összes lehetséges részfát (*Cayley* tétele szerint egy n szögpontú gráfban ebből pontosan n^{n-2} darab van), ezek mindegyikére kiszámítjuk a benne található élek súlyainak összegét, és ezekből kivesszük a (z egyik) minimálisat.

A feladat e megoldásának azonban két buktatója is van. Az egyik, hogy nem is olyan könnyű az összes részfát felsorolni. A másik ennél komolyabb ellenvetés: az algoritmus olyan sokáig tartana, hogy még minimális n mellett sem lehetne kivárni.

Az előzőekben megjegyeztük, hogy egy gráf fáit, habár sokan vannak, fel lehet algoritmikusan sorolni. Az ilyen felsorolások között a legnevesebb az ún. *Prüfer-kód*, amely

a) egyrészt tetszőleges $(v_1, \ldots, v_n)$ csúcsokon adott T fához hozzárendel egy $(k_1, \ldots, k_{n-2})$ sorozatot, ahol $k_1, \ldots, k_{n-2}$ 1 és n közötti egész számok;

b) különböző fakhoz különböző sorozatokat rendel;

c) minden $(k_1, \ldots, k_{n-2})$ sorozathoz, ahol k_i 1 és n között van, létezik olyan fa a megadott n ponton, amelynek éppen ez a kódja.

Röviden: a Prüfer-kód egy kölcsönösen egyértelmű leképezés az n ponton megadható fák és a fenti $(k_1, \ldots, k_{n-2})$ sorozatok között.

A kód leírása semmi különös képzettséget nem igényel, nem hosszú, azonban nem túl egyszerű és ezért nem ismertetjük. Megjegyezzük azonban, hogy ebből lehet legegyszerűbben levezetni, hogy n ponton n^{n-2} fa van, hiszen a fák kódjairól világos, hogy n^{n-2} a számuk. Ha nem akarjuk ennyire takarékosan felsorolni a fákat, akkor több módszer is adódik. A legdurvább ezek közül, hogy felsoroljuk az összes n pontú gráfot, majd kiválasztjuk közülük a fákat.

Feladat. Készítsünk olyan algoritmust, amelyik minden n pontú gráfot egy $\binom{n}{2}$ hosszúságú 0-1 sorozatra képez le, úgy, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű a gráfok és az $\binom{n}{2}$ hosszúságú 0-1 sorozatok között.

(Gondoljunk arra, hogy $\binom{n}{2}$ lehetséges él közül kell kiválasztanunk a gráf éleit! Ezek szerint hány n pontú gráf van?)

---

* *Teljes gráf*nak nevezzük azt a gráfot, amelyben bármely két pont össze van kötve. A *fa* olyan összefüggő graf, melyben nincs kör. Világos, hogy itt összefüggő gráfra van szükség, ugyanakkor ha van benne kör, annak egy élét elhagyva olcsóbb megoldást kapnánk.

Feladat. Tekintsük a következő algoritmust. Egy adott gráf egyik pontja mellé 0-t írunk. Ezután vesszük a szomszédait, ezekbe egyest-egyest írunk, ezek szomszédaiba (ha nincs ott már egyes, akkor) 2-t stb. Ha már bizonyos szögpontokba 0, 1, 2, ..., k van írva, megnézzük, van-e a k-val jelölt pontoknak olyan szomszédja, amelyikben még nincs szám, ezekbe $(k+1)$-et írunk. Ha nincs ilyen szomszéd, akkor megállítjuk az algoritmust. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor kerül minden pontba szám, ha a gráf összefüggő!

Feladat. Mutassuk meg, hogy a fenti algoritmusban, ha egy pontba k kerül, akkor ezt a pontot elérhetjük a 0-val jelzett, ún. gyökérpontból k lépésben, de nem érhetjük el kevesebb lépésben!

Feladat. Készítsünk olyan algoritmust, amely eldönti minden gráfról, hogy van-e benne kör!

Feladat. Felhasználva, hogy egy gráf akkor és csak akkor körmentes, ha minden összefüggő részében eggyel kevesebb él van, mint pont, készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy egy gráf tartalmaz-e kört.

Megjegyzés. A fenti algoritmusok összekapcsolásával könnyű olyan (egyébként borzasztóan lassú) algoritmust csinálni, amelyik felsorolja a fákat: felsoroljuk az összes gráfot, megvizsgáljuk melyek ezek között az összefüggőek, ezek közül melyek körmentesek, a többi gráfot eldobjuk. Így éppen a fákat soroltuk fel.

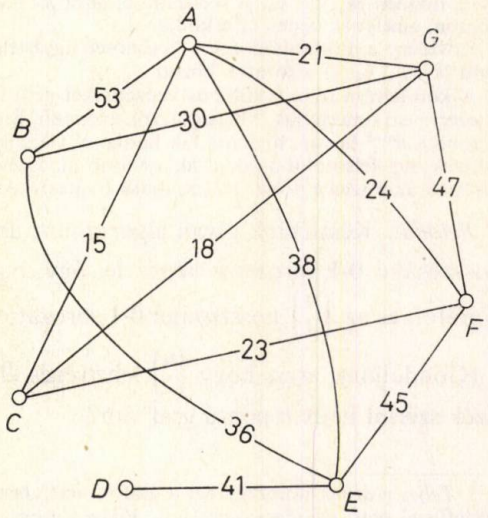
Feladat. Felhasználva, hogy minden fában van elsőfokú pont, melyet (és a belőle kifutó élt) elhagyva egy eggyel kisebb pontszámú fához jutunk, készítsünk algoritmust a fák felsorolására.

A minimális költségű fát ilyen felsorolással gyakorlatilag nem találhatjuk meg. Esetünkben azonban egy másik, ún. *mohó* algoritmus is működik. (Általában mohónak nevezzük azokat az algoritmusokat, melyek mindig az azonnal maximális haszonnal járó lépést teszik meg, s nem törődnek azzal, hogy ez a választás esetleg később megbosszulja magát.) A minimális költségű részfa előállítására szolgáló alábbi algoritmust felfedezőjéről *Kruskal*-algoritmusnak nevezik.

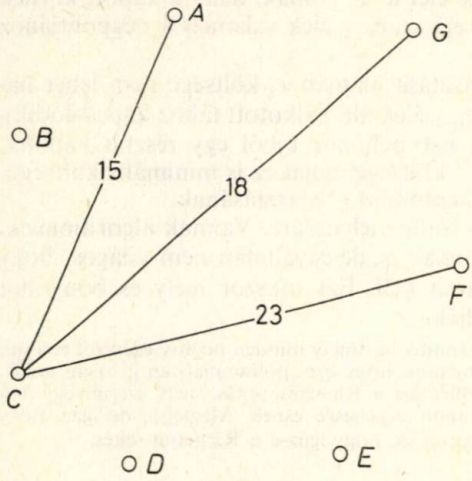
Az algoritmus leírása

Válasszuk ki az élek közül a legolcsóbbat, legyen ez e_1! Ezután válasszuk ki az e_1-hez csatlakozó élek közül a legolcsóbbat, e_2-t! Ha már $e_1, \ldots, e_j$-t kiválasztottuk, akkor legyen e_{j+1} az az él (vagy az egyik olyan), amelynek költsége a lehető legkisebb, és az $e_1, \ldots, e_j$-hez hozzávéve még mindig fát kapunk (azaz $e_1, \ldots, e_j$ valamelyikének végpontját köti össze egy új ponttal). Az így kapott $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ élek egy minimális költségű részfa élei.

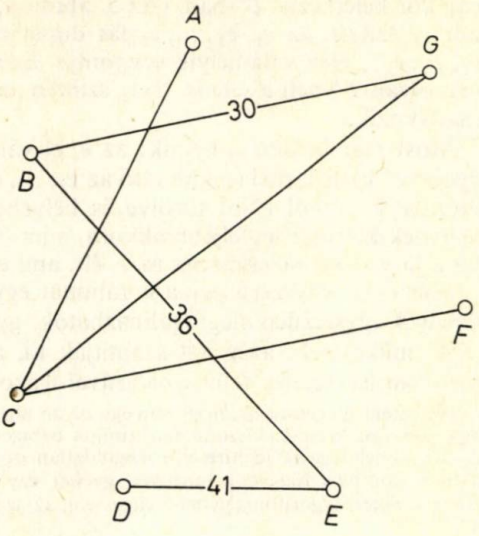
Az algoritmus leírása után több kérdés vetődik fel:



2. ábra



3. ábra



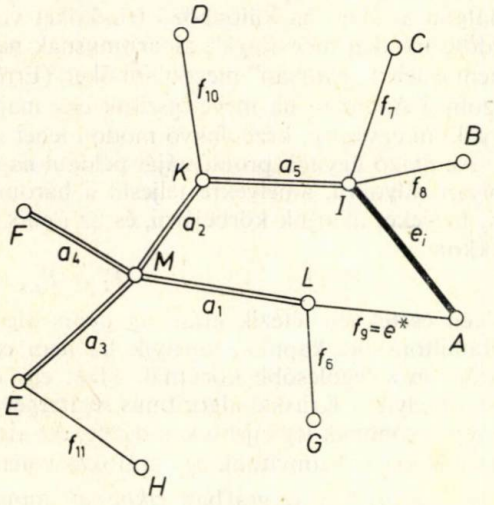
4. ábra

1. Az algoritmus valóban működik-e? Vagyis ad-e valamilyen végeredményt, továbbá a kívánt végeredményt adja-e? Hogy itt a válasz igenlő, azt az alábbiakban fogjuk belátni.

2. Az is kérdés, hogy az algoritmus milyen sebesen működik. Ebben az esetben az algoritmus meglehetően egyszerű, és kis ügyeskedéssel úgy is programozható, hogy végrehajtási ideje kevesebb legyen cn^2-nél* (feltéve, hogy a súlyok mind legfeljebb 10 jegyű pozitív egész számok).

Ami az algoritmus helyességét illeti, világos, hogy részfát kapunk, hiszen minden lépésben egy-egy új pontot kötöttünk össze a már meglevő fával. Miért lenne ennek költsége minimális?

Tegyük fel, hogy az algoritmus által szolgáltatott T részfa nem minimális költségű, és legyen i a maximális olyan index, amelyre $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_{i-1}$ még egy minimális költségű T^* részfa élei közül kerülnek ki, de $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_i$ már egyetlen minimális költségű részfa élei között sincsenek! (Persze ha $i=1$, akkor már e_1 sem szerepelhet egy minimális költségű részfában.) Az e_i nem éle T^*-nak, tehát ha e_i-t behúzzuk, akkor



5. ábra

* Most n nem a feladat méretét jelenti, hanem a szögpontok számát. A feladat mérete esetünkben n^2.

egy kör keletkezik T^*-ban. (Az 5. ábrán e_i-t vastag vonallal húztuk be, a keletkezett kör: *LMKIA*, az $e_1, e_2, \ldots, e_5$ fát dupla vonallal húztuk ki.) Az e_i egyik végpontja $e_1, \ldots, e_{i-1}$ élek valamelyik végpontja. Ezek élei a T^* fának, tehát a kapott körnek van olyan T^*-beli e^* éle is, mely szintén az $e_1, \ldots, e_{i-1}$ élek valamelyik végpontjához csatlakozik.

Most már készen vagyunk: az e_i él választása alapján e_i költsége nem lehet nagyobb e^* költségénél (mindkettő az $e_i, \ldots, e_{i-1}$ élek által alkotott fához kapcsolódik), ezért a T^* fából e^*-ot törölve és helyébe e_i-t behúzva újból egy részfát kapunk, melynek költsége legfeljebb akkora, mint T^* költsége, tehát ez is minimális költségű. Ez a fa viszont tartalmazza az e_i élt, ami ellentmond i választásának.

Már ez az egyszerű példa is rámutat egy fontos jelenségre. Vannak algoritmusok, amelyek egyszerűen megfogalmazhatók, gyorsak is, de egyáltalán nem világos, hogy „jól" működnek, azaz azt számítják ki, amit kell. Ezt sokszor mély és bonyolult matematikai tételek felhasználásával igazolják.

Példaként megemlítjük, hogy van egy olyan algoritmus is, amely minden pozitív egészről eldönti, hogy az prímszám-e, viszont nem tudjuk bebizonyítani, hogy ezt „polinomiálisan gyorsan teszi". A számelmélet egyik leghíresebb megoldatlan problémája a Riemann-sejtés, mely szerint egy bonyolult komplex függvény bizonyos gyökei egy adott egyenesre esnek. Meglepő, de igaz, hogy a fent említett algoritmus gyors-e vagy sem, az azon múlik, hogy igaz-e a Riemann-sejtés.

Közelítő algoritmusok

Tekintsünk egy pillanatra vissza az előző részben tárgyalt UTAZÓ ÜGYNÖK, illetve a HÁTIZSÁK problémákra. Az elsőben adva volt (mondjuk) 50 város, a városok közti távolságok, és meg kellett tervezni, hogy melyik az a körutazás, amelynek során a lehető legkevesebbet kell utazni. A hátizsák probléma az, hogy adottak különböző magasságú tárgyak, és mennyi az a legkevesebb számú, egységnyi mélységű hátizsák, amelybe az összes tárgyat bele tudjuk tenni.

Mindkét feladat könnyedén megoldható az összes eset végignézésével, de ezért a könnyedségért nagy árat kell fizetni: az eljárás borzasztóan sokáig tart. Nem segít a dolgon az sem, ha különböző trükköket vetünk be; a feladatok *pontos* megoldása eddig minden megvizsgált algoritmusnak nagyon sokáig tartott, s az a sejtés, hogy nem is lehet „gyorsan" megoldani őket. (Erről egy későbbi cikkben bővebben fogunk szólni.) Azonban ha megelégszünk egy majdnem optimális megoldással, akkor azt gyakran egyszerű, kézenfekvő módon lehet megtalálni.

Az utazó ügynök problémáját például nagyon gyakran alkalmazzák, de többnyire olyan súlyokra, amelyekre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Azaz ha a $K_1, \ldots, K_n$ helyeket akarjuk körbejárni, és az i-edik községből a j-edikbe $F_{i,j}$-be kerül az út, akkor

$$F_{i,j} + F_{j,k} \geqq F_{i,k}.$$

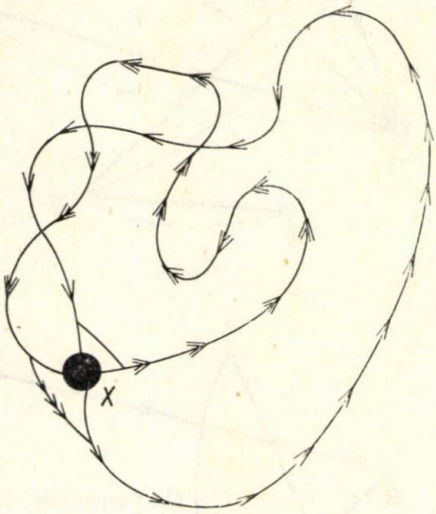
Ilyen esetekben létezik aránylag gyors algoritmus, melynek eredményeként olyan Hamilton-kört kapunk, amelyik ha nem is a legolcsóbb, de legfeljebb másfélszer drágább a legolcsóbb körútnál. Most egy olyan *egyszerűbb* algoritmust mutatunk be, amelyik a Kruskal-algoritmus segítségével olyan Hamilton-kört ad, melynek ára a legolcsóbbnak legfeljebb kétszerese. Az algoritmust úgy a legkönnyebb elmondani, ha először bebizonyítunk egy gráfokra vonatkozó tételt.

Definíció. Egy G gráfban *ciklusnak* mondjuk élek egy olyan $e_1, \ldots, e_k$ sorozatát, ahol e_i egyik végpontja e_{i+1} végpontja, e_i másik végpontja e_{i-1} végpontja. Ha egy gráfban van olyan ciklus, amelyik mindegyik élt pontosan egyszer tartalmazza, akkor azt *Euler-körnek* nevezzük. Ha egy gráfban van Euler-kör, akkor a gráfot *Euler-gráfnak* mondjuk.

Tétel. G akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő, és minden pont foka páros. (Ebben a tételben megengedhetjük a többszörös éleket is!)

Bizonyítás. Az magától értetődő, hogy ha G Euler-gráf, akkor összefüggő, hiszen az Euler-körén minden élből minden élbe, ezért minden pontból minden pontba is eljutunk. Az is világos, hogy minden pont foka páros, mert az Euler-körön végigjárva ugyanannyiszor megyünk be egy pontba, mint ahányszor kijövünk onnan.

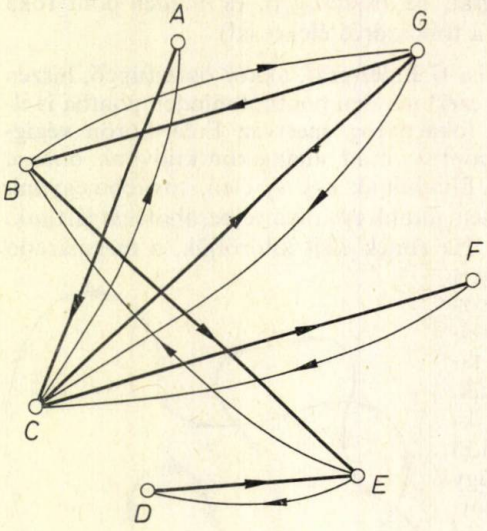
A megfordítás bizonyítása sem nehéz. Elindulunk egy e_1 élen, továbbmegyünk e_2-n, ... és addig megyünk így, amíg vissza nem jutunk egy olyan élbe, ahol már jártunk. Ezáltal kapunk egy C_1 ciklust a gráfban. Ha ennek éleit kitöröljük, a megmaradó G' gráfban ugyancsak minden pont páros, ezért abban is találunk egy ciklust. (Hogyan használtuk fel a C_1 ciklus létezésének bizonyításában a fokok párosságát?) G'-ben tehát találunk egy C_2 ciklust, ennek éleit is töröljük. A megmaradó G''-ben találunk egy C_3 ciklust, mert ennek a fokai is párosak. Egy idő után minden élt ciklusokba fűztünk: úgy mondjuk, hogy a gráf élhalmazát felbontottuk diszjunkt ciklusok egyesítésére. Most jön a második menet: a ciklus-hizlalás. Megmutatjuk, hogy ha van két ciklusunk, azokból egyet kaphatunk, feltéve, hogy van közös pontjuk. Ahelyett, hogy ezt formálisan felírnánk, lerajzoltuk a 6. ábrán. A két ciklus közös X pontján először nyugatról keletre, illetve északról délre haladtunk át. A ciklusokat úgy fűzzük össze, hogy elindulunk az 1. cikluson, de amikor nyugatról beérkezünk X-be, eltérünk délre, végigjárjuk a 2. ciklust, majd visszaérkezve ezen X-be eltérünk keletre, folytatva és befejezve sétánkat az 1. cikluson.



6. ábra

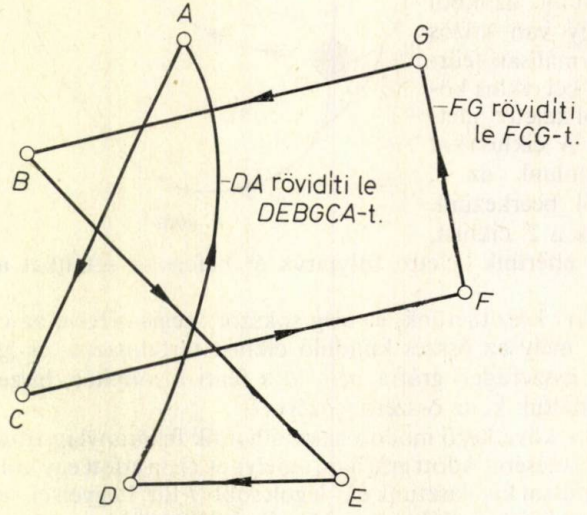
Így bármely két ciklusból egyet készíthetünk, és elég sokszor megismételve az eljárást egyetlen ciklust kapunk, mely az összes kiinduló ciklust tartalmazza, és így minden élt is tartalmaz. (Nem összefüggő gráfra nem jó a fenti bizonyítás, hiszen nem is igaz az állítás. Hol használtuk ki az összefüggőséget?)

Ezután a Kruskal-algoritmust a következő módon használhatjuk fel aránylag rövid (= kis költségű) Hamilton-kör keresésére. Adott gráfban, amelynek élein adott egy költségfüggvény, a Kruskal-algoritmussal kiválasztunk egy legolcsóbb T fát. Legyen ennek költsége K. Megmutatjuk, hogyan lehet a gráfban egy $2K$-nál olcsóbb ciklust szerkeszteni. Ha minden élt megkétszerezünk a T fában, olyan összefüggő gráfhoz jutunk, melyben minden pont foka páros. Emiatt van benne Euler-kör. Ez az Euler-kör a fa minden élét kétszer használja föl, tehát költsége $2K$. Ha most a legolcsóbb Hamilton-kör költsége H, akkor természetesen a legolcsóbb Hamilton-út (= minden ponton átmenő út) költsége ennél nem nagyobb, hiszen H-nál olcsóbb Hamilton-utat kapunk, ha a legolcsóbb Hamilton-kör egy élét elhagyjuk. A legolcsóbb Kruskal-fa ennél nem drágább, hiszen a Hamilton-utunk is fa, így a legolcsóbb fa olcsóbb, mint a legolcsóbb Hamilton-út. Ezzel beláttuk, hogy $K \leqq H$, azaz a fenti ciklusunk költsége $\leqq 2K \leqq 2H$. A megduplázott T fában az Euler-kör az eredeti gráf minden pontján átmegy, de sajnos, bizonyos pontokon többször. Viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt ebből a ciklusból egy Hamilton-kört gyárthatunk az alábbi módon.



7. ábra

Elindulunk egy A pontból a $2n-2$ élből álló ciklus mentén, esetünkben az ACFCGBEDEBGCA, és addig megyünk, amíg olyan pontba nem érünk, C-be, ahol már jártunk (7. ábra). Ide F-ből érkeztünk. Nézzük meg, melyik a következő olyan pont a ciklusunkban, ahol még nem jártunk! Esetünkben ez G. Ahelyett, hogy F-ből C-be mennénk, ugorjunk rögtön ebbe a G-be. Ezzel az FCG utat (a háromszög-egyenlőtlenség miatt) lerövidítettük, vagy legalábbis nem növeltük meg. G-ből továbbmegyünk és kikeressük az első olyan pontot, ahol még nem jártunk. Ugorjunk G-ből ide! A legközelebbi pont, ahová másodszor is be kellene mennünk, E. Ám, az összes további pontban: B-ben, G-ben, C-ben már jártunk, s így az utat befejezvén D-ből egyenesen visszamegyünk A-ba. Így egy olyan Hamilton-kört kaptunk, amely legfeljebb $2K$ költségű, s ezért legfeljebb $2H$ költségű is. Éppen ezt akartuk bizonyítani.



8. ábra

Térjünk át most a hátizsák feladatra! Még mielőtt a közelítő megoldásai tárgyalásába belefognánk, újabb illusztrációt adunk alkalmazhatóságára.

30 perces kazettákra kell magnetofonfelvételeket csinálnunk. A különböző számokat, melyek időtartamát tudjuk, akármilyen csoportosításban felvehetjük. A legkevesebb kazettát akarván felhasználni, éppen egy „hátizsák problémával" állunk szemben. (Természetesen a magnetofonfelvételeknél gyakran más szempontokat is figyelembe kell venni: nem szeretnénk például, ha egy Beatles-felvétel egy Schubert-szimfóniával egy szalagra kerülne.) Számítógépek esetén a háttértárolók elosztása a különböző felhasználók között is egy hátizsák probléma.

Közel optimális megoldására igen sok különböző algoritmus ismeretes. Az alábbiakban egy ilyet vizsgálunk meg, melyet az első alkalmas helyet elfoglaló mohó algoritmusnak is szokás nevezni.

Az $a_1, \ldots, a_n$ számokat akarjuk tehát elhelyezni a lehető legkevesebb 1 mélységű hátizsákban. Végigmegyünk a számokon *ebben a megadott sorrendben*, és mindegyiket elhelyezzük a *legelső* olyan hátizsákban, amelybe még belefér.

Így általában nem a leggazdaságosabb megoldást találjuk meg. Legyen például 30 tárgyunk, ezek közül 10 darab $0{,}1-2\varepsilon$ magasságú, 10 darab $0{,}4+\varepsilon$ és 10 darab $0{,}5+\varepsilon$ magasságú, ahol ε elég kicsi (mondjuk 0,001)! Világos, hogy ezeket 10 hátizsákba bepakolhatjuk, mindegyikbe mindegyik méretből egyet-egyet. Ugyanakkor a fenti algoritmussal a fenti sorrend esetén az első hátizsákba beletesszük az összes $0{,}1-2\varepsilon$ méretű tárgyat. A második, harmadik, ..., hatodik zsákba kettő-kettő fér a $0{,}4+\varepsilon$ méretű tárgyakból, és a $0{,}5+\varepsilon$ méretűekből pedig egy zsákba csak egyet tehetünk. Így összesen 16 zsákot használtunk fel 10 helyett.*

A fenti algoritmus egyik változata az, hogy először a számokat csökkenő sorrendbe rakjuk, majd alkalmazzuk a fenti eljárást. A fenti 30 tárgy esetén tehát először a 10 db $5+\varepsilon$ méretű tárgyat helyezzük el egy-egy zsákba, ugyanezekbe belerakhatjuk még a megmaradó 10 db $(4+\varepsilon)$-os darabot. Végül a $0{,}1-2\varepsilon$ méretűekkel kitöltjük a megmaradt lyukakat: a minimális 10 zsákra volt szükségünk.

Gondoljuk át, hogy mit csinál az első, illetve a második algoritmus, ha a $0{,}1-2\varepsilon$ mélységű darabokat 0,1 mélységűekre cseréljük!

Megmutatjuk, hogy az első algoritmussal nem használunk fel többet, mint a feltétlenül szükséges hátizsákok számának kétszerese. Tegyük fel, hogy összesen m hátizsákot használtunk fel, és jelöljük W_i-vel az i-edik hátizsákba bepakolt tárgyak összmagasságát. Elsőként belátjuk, hogy bármely két hátizsákban együttvéve 1-nél nagyobb összmagasságú tárgyak vannak. Legyen $j<i$, és nézzük azt az a_k magasságú tárgyat, amit utoljára tettünk be az i-edik hátizsákba. Ez csak úgy kerülhetett az i-edik zsákba, ha nem fért már el a j-edikbe, azaz $1-W_j<a_k$. Másrészt ez benne van az i-edik zsákban, tehát $a_k \leqq W_i$, Ezekből azonnal adódik, hogy $W_i+W_j>1$.

Ha most mindegyik hátizsák legalább félig meg van töltve, akkor

$$W_1+W_2+\ldots+W_m \geqq \frac{1}{2}m.$$

Ha pedig valamely $i \leqq m$-re $W_i<1/2$, akkor az előzőek szerint minden $j \neq i$-re $W_j>1-W_i$, azaz

$$W_1+W_2+\ldots+W_m \geqq W_i+(m-1)(1-W_i) =$$

$$= (m-1)+(m-2)W_i \geqq \frac{1}{2}m.$$

Mivel a tárgyak összmagassága $W_1+\ldots+W_m$, tehát ennyi hátizsákra feltétlenül szükség is van. Kaptuk, hogy a szükséges hátizsákok száma legalább $m/2$, ahogyan állítottuk.

Feladat. Becsüljük meg az algoritmus végrehajtásának idejét!

Mese az algoritmikus megoldhatatlanságról

Itt csak néhány feladatot és az azok megoldására szolgáló algoritmust ismertethettünk abból a hatalmas anyagból, amely az elmúlt 20—25 év alatt gyűlt össze. A most következő fejtegetéseink is erre a hatalmas tapasztalati anyagra épülnek, s nem a néhány kiragadott példára.

---

* Ez a példa is mutatja, hogy a „mohóság" hogyan bosszulja meg magát: rögtön elhasználtuk azokat a kis méretű tárgyakat, amelyekkel a kimaradó réseket betölthetnénk.

Képzeljük el a következő helyzetet: adott egy feladat, és nekünk egy megoldó algoritmust kell találnunk hozzá. Egyes esetekben a megoldás nyilvánvaló, mint pl. az utazó ügynök esetében: véges sok esetet kell végigvizsgálni, s az esetek közül egyet valamilyen szempontok szerint kiválasztani. Így a megoldást véges lépésben megkapjuk. Ezenfelül még azért is kedvező a helyzet, mert előre meg tudjuk becsülni a szükséges lépésszámot: ez n város esetén legfeljebb $(n+1)!$.

Az egy más kérdés, hogy az algoritmus ettől még lehet olyan lassú is, hogy gyakorlati szempontból teljesen használhatatlannak bizonyul. Ennél egy kissé rosszabb a helyzet akkor, ha olyan algoritmusunk van, melyről csak annyit tudunk, hogy minden lehetséges bemenő adatra véges sok lépésben megadja a keresett megoldást; nem tudjuk azonban, hogy erre mennyi idő kell: a bemenő adatok semmilyen függvényével nem tudjuk a futási időt megbecsülni.

Most jön a „fekete leves": vannak olyan egyszerűnek látszó esetek is, amikor egyáltalán nem létezik olyan algoritmus, amelyik minden bemenő adatra megtalálná a megoldást.

Illusztrációnak tekintsük a következő példát: adva van egy (igaz) elemi geometriai állítás, s olyan algoritmust keresünk, amely ezt az állítást bizonyítja.

Amikor az euklideszi geometriában egy tételt le akarunk vezetni, rögzíteni szoktuk az ún. axiómákat, továbbá, bár ezt többnyire elhallgatjuk, a „következtetési logikát" is. Ez utóbbi írja le, hogy bizonyos meglevő állításokból hogyan következnek újabb állítások. Egy tételt *bizonyíthatónak* (levezethetőnek) mondunk, ha van állításoknak olyan sorozata, mely néhány axiómával kezdődik, és az összes többi állítás a megelőző állításokból (az adott logika mellett) *következik*. Készíthető olyan számítógép, amelyik egymás után minden bizonyítást felsorol. Megtehetjük, hogy ebbe a gépbe beadunk egy tetszőleges geometriai állítást, majd megindítjuk. Erre elkezdi felsorolni a létező bizonyításokat, és mondjuk mindig ellenőrzi, hogy éppen a beadott állítást bizonyítja-e. Ha igen, akkor a gép álljon meg és írja ki: „az állítás igaz", majd annak a bizonyítását. Ha pedig az állítás tagadását bizonyítaná, álljon meg és írja ki: „az állítás hamis", majd *ennek* bizonyítását.

A géppel kapcsolatban két furcsa, s az első pillanatban meghökkentő tény:

1. Nincs mód eldönteni, hogy egy adott állítást a gép be tud-e bizonyítani. Más szóval lényegében nem tudjuk másképpen eldönteni, hogy a gép megáll-e, csak úgy, hogy az állítást beadjuk, és várunk, hogy a gép kiírja-e: „az állítás igaz", vagy hogy „az állítás nem igaz". Ha azonban egy ideig ezt nem tette meg, nem tudhatjuk, hogy nem fog-e a következő pillanatban megállni vagy még végtelen sokáig fog „ketyegni".

2. A második az, hogy lehet, hogy az állítás igaz ugyan, azonban nem bizonyítható az általunk lerögzített axiómákból. Az ilyen igaz állításoknál is csődöt mond a gépünk. (Ilyen állítás tetszőleges, a gép számára „érthető" axiómarendszer esetén létezik!)

Másik példaként említhetjük Hilbert 10. problémáját, mely eredetileg a következőképpen szólt. Adjunk meg olyan eljárást (=algoritmust), amely minden egész együtthatós, akárhány változós polinomra megmondja, hogy van-e a polinomnak egész értékekből álló gyöke! 1970-ben bebizonyították, hogy ilyen algoritmus nincs.

Tekintsük az összes olyan $F(x)$ függvényt, mely a sin $(2\pi x)$ függvényből, az x függvényből és racionális számokból összeadással, szorzással és közvetett függvény képzéssel kapható meg! A fenti eredményből az is következik, hogy nincs olyan algoritmus, amelyik az összes ilyen függvényre eldöntené, hogy van-e valós gyöke vagy sem. (Az „eldöntés" azt jelenti, hogy az algoritmusnak minden feltehető kérdésre meg kell állnia, és vagy „igen", vagy „nem", választ adnia.)

Nem lehetünk biztonságban a számítógépek területén sem: nem eldönthető probléma, hogy egy tetszőleges program meg fog-e állni vagy sem. Nincs algoritmus,

amely minden programra megmondaná, hogy a program *tartalmilag* helyes-e. (Ezt úgy kell érteni, hogy a program le van írva valamilyen módon, a feladatot is leírjuk valamilyen ügyes módon, és olyan algoritmust szeretnénk, amelyikbe akárhogyan is adunk be egy ilyen programleírást és egy feladatleírást, az algoritmus egy idő után kiadja, hogy: „igen, ez az algoritmus ezt a feladatot megoldja", vagy „nem, az algoritmus nem (mindig) oldja meg a feladatot".)

Hasonlóan olyan algoritmus sincs, amelyik bármely két programról eldöntené, hogy azonos bemenetre azonos-e a kimenetük, azaz — durván szólva — hogy ugyanazt a feladatot oldják-e meg. Sőt némi túlzással az is mondható, hogy a számítástechnikában nehezen lehet olyan *általános* feladatot találni, mely eldönthető!

Az is meglepő, hogy vannak olyan feladatok, amelyekre nincs leggyorsabb megoldó algoritmus. Pontosabban szólva megadható olyan $F(n)$, a természetes számokon értelmezett függvény, hogy bármely, az $F(n)$ függvényt kiszámító, $f(n)$ sebességű A algoritmushoz található olyan B algoritmus, mely ugyancsak az $F(n)$ függvényt számítja ki, de sebessége elég nagy n-ekre ln $f(n)$-nél kisebb.

GÁDOR ENDRÉNÉ
ny. egyetemi adjunktus
Budapest

Beszámoló a CIEAEM

(A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság)

1981. évi találkozójáról

A CIEAEM 1981. évi találkozóját augusztus 2-tól 9-ig tartotta az olaszországi Pallanzában, a Lago Maggiore partján. Témája a következő volt: geometrizálás és szemléltetés.

A tulajdonképpeni program augusztus 3-án kezdődött plenáris üléssel, de a CIEAEM Intéző Bizottsága már az előző két napon is ülésezett. Megbeszélték a program részleteit, ami nem is volt könnyű dolog, hiszen több, mint 50 előadást kellett (a plenáris üléseket és csoportos megbeszéléseket leszámítva) beosztani 5 félnapra. Ez csak úgy volt lehetséges, hogy 4 előadás folyt párhuzamosan. Következésképpen teljesen esetleges volt, hogy egy-egy résztvevő melyiket hallgatta meg. Ezt részben az előadó személye, részben az előadás címének vonzóereje határozta meg, de nem mindig sikerült kiválasztani a négy közül a legjobbat, a leghasznosabbat.

A megnyitó ülésen *Emma Castelnuovo* és *Anna Zofia Krygowska* tarottak előadást. *E. Castelnuovo* rövid és nem teljes történeti áttekintést adott a geometria fejlődéséről. Az első periódus szerinte a babiloniai matematikától kb. a XVI. századig tartott. A XVI. században előtérbe került az algebraizálás: az analitikus geometria, ami hozzájárult ahhoz, hogy el lehessen jutni az analízishez. Ez volt a második periódus. Azonban az algebrában és az analízisben hiányzott az az axiomatikus megalapozás, amit *Euklidész* elvégzett a geometriával kapcsolatban. A következő periódus a XIX. században kezdődött, amikor kialakult a valós számok elmélete. Az utolsó századokban egységesebb lett a matematika. A matematika egész története a konkréttól az absztrakthoz, az egyeditől az általánoshoz vezet. A geometria vezetett el a valószínűségszámítás egyes fejezetei-

hez, az analízishez, az általános relativitáshoz és a fizika több más területéhez. A matematika többi ágával való szoros kapcsolat vezetett újabb fejlődéshez a geometriában is (pl. a kombinatorikus geometriához). Kiemelendő a differenciálgeometria és a fizika szoros kapcsolata. A matematika tananyaga nagy részének az alapja minden fokon a geometria, közvetlenül vagy közvetve.

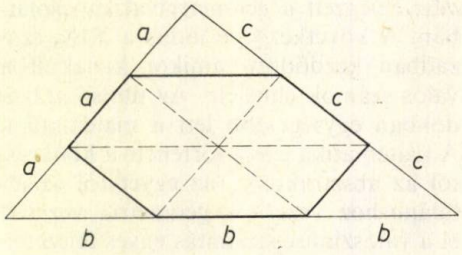
A. Z. Krygowska a geometrizálást a gyerekek szempontjából vizsgálta. A geometrizálás két alapvető funkcióját különböztette meg:

1. A geometrizálás mint a térbeli tapasztalatok és felismerések matematikai kifejezése. Ez az iskolában különböző szinteken történik. Ebben a folyamatban a mindennapi nyelv egyre formálisabbá válik (matematikai értelemben). A rajz jellege is egyre sematikusabb lesz.

2. A geometrizálás szerepe az absztrakt struktúrák bemutatásában, különböző szinteken; a rajz szerepe ebben a folyamatban.

Példákat mutatott be, ahol a fizikai világ, a rajz és a gyerek képzelete összetevődik. Például egybevágó háromszögekkel „parkettáznak". Néhány lépés után a gyerek már látja, hogy ez hogyan megy, nem érdemes folytatni. Vagy: felsorakozott gyerekeket látcsövön át néznek. A gyerek „látja" az egyenest, amelynek mentén a többiek állnak.

Egy nehezebb példa: egy háromszögből — az ábrán látható módon — levágunk három kis háromszöget. Van-e szimmetria-középpontja a megmaradó hatszögnek? Nincs, mert a kis háromszögek oldalai nem tartoznak hozzá,



hiszen a megmaradó hatszög nyílt ponthalmaz.

Több előadó foglalkozott azzal a gondolattal, hogy a geometria a világon mindenütt jelen van, a természet tárgyaiban és a legkülönbözőbb művészetekben. Érdekesen fejtette ki ezt *Werner Jundt:* A geometria a természet szépségének ősformája (Kepler), valamint *Michele Emmer:* Művészet és matematika című előadásában. Ez utóbbi négy rövidfilmet is bemutatott mondanivalójának illusztrálására. Ezekben a tengeri csillagtól kezdve a szappanbuborékon, a Moebius-szalagon, a különböző szimmetrikus alakzatokon keresztül a mozaikművészetig és *M. C. Escher* műveiig sok érdekes példát gyűjtött össze.

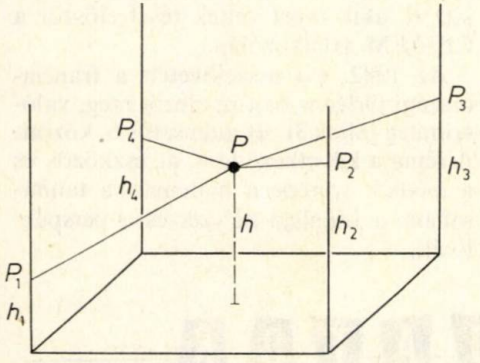
Mindkét előadás lényegében arra mutatott rá, hogy a geometriát felhasználjuk mint a világ megfigyelésének egyik eszközét, és ez jó modell számunkra a világ megértéséhez. Ezt a gondolatot megfelelő didaktikai formában fel lehet használni az iskolában is.

Heinrich Bauersfeld: A nyelv szerepe a geometriai fogalmak kialakításában címmel tartott előadást. Szerinte minden geometriai tevékenység többet hoz létre, illetve többet használ fel, mint csupán geometriai ismereteket. A geometriaórákon a gyerekek önmagukból is megismernek valamit, a tanár pedig — meg akarván győződni a tanulók geometriai ismereteiről — igyekszik őket bátorítani, motiválni, ezzel jellemüket fejleszteni. Eközben gyakran sok mellékkörülményt elhanyagolnak, például a cselekvés általi tanulást, az önállóságot. Ha a gyerek maga „csinálja" a geometriát, rengeteg összefüggést, feltételt vesz észre; alakítja a tudását. (Például hogyan lehet valamit visszaidézni; hogyan lehet adott vagy már ismert információkat felhasználni; egyes helyzeteket egymástól megkülönböztetni; hogyan lehet a saját tapasztalatait rendszerezni stb.)

Nagyon fontos a nyelv szerepe a geometriai fogalmak kialakításában. Lényegesek a tanár kérdései, az hogy mit kér-

dez és milyen körülmények között teszi fel a kérdéseit. Ezektől függ nagymértékben, hogy a tanuló tudása verbális lesz-e vagy pedig tényleges ismeretekre épül.

Emma Castelnuovo és *Daniela Gori Giorgi* érdekes kísérletről számolt be. 15—16 éves tanulókkal végezték, akik még semmit sem hallottak a differenciálszámításról. Az volt a céljuk, hogy bizonyos térbeli folyamatokat láthatóvá tegyenek a tanulók számára, megfelelő modell segítségével. Az ötletet egy meteorológiai probléma adta. Kimutatható, hogy stacionárius körülmények között a légnyomás egy tetszés szerinti pontban kiszámítható az azt körülvevő pontokban fellépő nyomásértékekből a *Laplace*-féle egyenlettel. Ezt olyan modellen

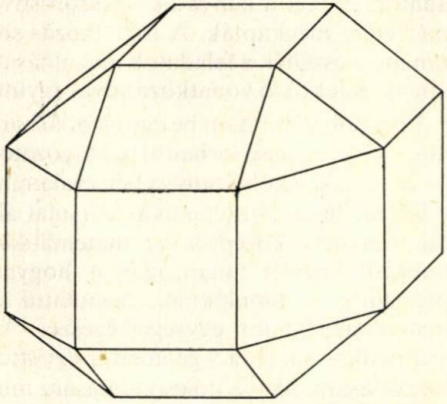


$$h = \frac{1}{4}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

szemléltették, amely a *Laplace*-féle egyenlet közelítő megoldását adja. A modell — egyetlen pontot tekintve — négy, oszlopokra kifeszített gumiszálból állt. A gumiszálak végeinek magassága jelölte az adott pontban a légnyomást. Ezt a gondolatot általánosították nagyon sok oszlopra kifeszített gumiszálra, majd kiterjesztették más fizikai jelenségekre is.

Hallottunk egy előadást arról, hogy a svájci Vaud kantonban milyen szempontok alapján próbálnak kialakítani új matematika-tantervet. Az előadó, *Jean-Michel Kern* nem a tantervről beszélt, hanem arról, hogyan készítik fel erre a tanárokat.

Dieter Lunkenbein és munkatársai több előadásban számoltak be a kanadai Sherbrooke-ban végzett alsó tagozatos kísérleteikről. Az egyik előadásban — filmvetítéssel kísérve — azt mutatták be, hogyan próbálják megszámlálni gye-



rekek és felnőttek az ábrán látható test lapjait. Nyomon lehetett követni a próbálkozások mögötti gondolatokat, de általános következtetést nem lehetett levonni. Mindegyikük másképpen gondolkodott, próbálgatott, de nem találtak semmiféle rendszert, amelynek alapján a feladatot egyszerűen tudták volna megoldani.

Egy másik alkalommal ún. műhelyfoglalkozáson mutatta be *Lunkenbein*, hogyan lehet olyan problémákat felvetni, amelyekben a geometria és aritmetika szorosan összekapcsolódik. A kiindulás az volt, hogyan lehet szabályos háromszögekből további sokszögeket előállítani (háromszögrácson), és ez vezetett el a síkidomok és számok (négyzetszámok, számpárok, számhármasok) sokoldalú kapcsolatához. Közben a síkidomok sok érdekes tulajdonságát is fel lehetett fedezni. A gyerekeket nyilván erősen motiválja az ilyen lefolyású óra, amely sok önálló megfigyelésre ad lehetőséget, és sok összefüggést tár fel számukra.

Délutánonként folyt az 1979-es veszprémi találkozó óta jól bevált ötletvásár. Itt mindenki bemutathatott könyveket,

folyóiratokat, szemléltető és munkaeszközöket, filmeket, diasorozatokat.

A találkozónak három magyar résztvevője volt.

Surányi János műhelyfoglalkozást tartott. Kitűzött hét rácsgeometriai feladatot. Ezeket a hallgatók sokszorosítva már előre megkapták. A foglalkozás során megbeszélték a feladatok megoldását, annak didaktikai vonatkozásaival együtt.

Én arról számoltam be egy előadásban, hogy az új — elsősorban felső tagozatos — általános iskolai tantervben, valamint a Bolyai János Matematikai Társulat által irányított középiskolai matematikatanítási kísérlet tananyagában hogyan próbáljuk a tanulóknak bemutatni a matematikát mint egységes egészet. Az aritmetika—algebra—geometria együttes tárgyalására, illetve kölcsönhatására mutattam be feladatokat.

Kovács Zoltán az ötletvásár keretében mutatott be többféle logikai játékot, amelyeket a Budapesti Tanítóképző Főiskolán használnak.

Augusztus 6-án a résztvevők megtekintették Pallanza híres botanikus kertjét, majd hajókiránduláson vettek részt. Felkeresték a Lago Maggiore két nevezetes szigetét, az Isola Madre-t és az Isola Bella-t, valamint meglátogatták a Pallanzával szemben fekvő Stresa-t.

Az augusztus 9-i záróülésen a résztvevők értékelték az elmúlt hét munkáját. Kifogásolták az előadások színvonalának heterogén voltát. Természetes, hogy 50-nél több előadás nem lehetett egyenlő mértékben színvonalas. Kevés volt a diszkusszió is, és nem a leglényegesebb kérdéseket vitatták meg. Itt figyelembe kell venni, hogy a nagyszámú résztvevő (több mint 250) miatt egyre kevesebb a közös érdeklődés, vitatéma. A hangulat sem volt a megszokott, szinte családias, mint az előző összejöveteleken. Az viszont nagyon örvendetes, hogy sok fiatal jött el, akik most vettek részt először a CIEAEM találkozóján.

Az 1982. évi összejövetelt a franciaországi Orléans-ban rendezik meg, valószínűleg július 31. és augusztus 6. között. A téma a következő lesz: az eszközök és a médiák szerepe a matematika tanításában: a jelenlegi helyzet és a perspektívák.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10.; 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldáshoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

999. Van-e olyan konvex sokszög, amelyet véges sok konkáv négyszögre darabolhatunk?

1000. Legyen $x_n = \frac{1}{2}(3^{2^n}+1)$.

Határozzuk meg az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok legkisebb közös többszörösének utolsó két számjegyét!

Bencze Mihály, Brassó

1001. Melyek azok az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ valós n-esek, amelyek kielégítik az alábbi egyenlőtlenségrendszert?

$$x_k^2+1 \leqq x_{\varphi(k)}+x_{\psi(k)} \quad (1 \leqq k \leqq n).$$

A φ és a ψ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak önmagára való bijektív leképezései (permutációi).

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1002. Egy (nem feltétlenül síkbeli) négyszög merőleges vetülete két egymásra merőleges sík mindegyikén 2 egység oldalú négyzet. Mekkora a négyszög kerülete, ha egyik oldala 5 egység hosszú?

Láng Hugó, Székesfehérvár

1003. Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{1066}$ a H véges halmaz olyan részhalmazai, amelyekre $|H_i|>\frac{1}{2}|H|$ minden $1 \leqq i \leqq 1066$-ra! Bizonyítsuk be, hogy létezik a H-nak tíz olyan $h_1, h_2, \ldots, h_{10}$ eleme, hogy valamennyi H_i részhalmaz tartalmaz ezek közül legalább egyet!

(Az $|X|$ az X halmaz számosságát jelöli.)

1004. Bizonyítsuk be, hogy bármely m egész és p páros természetes számra a

$$\left\{\left(\sqrt{16m^4-40m^3+441m^2-520m+2705}+4m^2-5m+52\right)^{p+1}\right\}$$

törtrész első $2p+1$ jegye zérus!

Bíró Béla, Barót

Feladatmegoldások (975—980).

975. Hány olyan természetes szám van, amely a 3^n-nél nem nagyobb, különböző (nemnegatív) egész kitevőjű háromhatványok összege?

I. megoldás: Tekintsük az

$$(1) \qquad a_n \cdot 3^n+a_{n-1} \cdot 3^{n-1}+\ldots+a_2 \cdot 3^2+a_1 \cdot 3+a_0 \cdot 3^0$$

összeget! Azt kell megszámolnunk, hogy hány olyan természetes szám van, amely (1) alakú összegként írható, és az összegben mindegyik a_i csak 0 vagy 1 lehet. Ezek a számok olyan hármas számrendszerbeli legfőljebb $n+1$ jegyű természetes számok, amelyeknek (a hármas számrendszerbeli alakjaban) csak az előbbi két jegy szerepel.

Ezek száma 2^{n+1}, mert az $n+1$ jegy mindegyike két értéket vehet fel.

Ha megköveteljük, hogy egy összeg legalább két tagú legyen, akkor

$$2^{n+1}-n-2$$

olyan természetes szám van, amely 3^n-nél nem nagyobb, különböző (nemnegatív) egész kitevőjű háromhatványok összege, mivel $n+1$ esetben lehet pontosan egy $a_i \neq 0$ és egyetlen esetben lehet valamennyi $a_i=0$.

Bogdán Zoltán, Cegléd

II. megoldás: Annyi, feltételeinknek megfelelő természetes szám van, ahányféleképpen a választható 0, 1, 2, ..., n kitevőkből kivehetünk kettőt, hármat, ..., $(n+1)$-et, azaz

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}-\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{0}=2^{n+1}-n-2.$$

Gőgh József, Gúta

Megjegyzés: Megoldásainkból látható, hogy ugyanennyi olyan természetes szám van, amely k^n-nél nem nagyobb, különböző (nemnegatív) egész kitevőjű k-hatványok összege ($k \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$).

Bagi Gábor, Barcs és Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 23.

976. Ha egy négyzetszám páratlan jegyre végződik, akkor milyen számjegyek állhatnak a tízesek, illetve a százasok helyén?

Megoldás: Egy szám négyzete akkor és csak akkor végződik páratlan jegyre, ha páratlan számnak a négyzete. Vizsgáljuk meg tehát — tízzel való oszthatóság szerint csoportosítva — a páratlan számok négyzeteit!

(1) $$(10k \pm 1)^2 = 100k^2 \pm 20k + 1$$

(2) $$(10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9$$

(3) $$(10k+5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$$

Formuláinkból látható, hogy

a) A négyzetszám utolsó jegye 1, 9 vagy 5.

b) A tízesek jegye mindig páros, mégpedig az *(1)* és a *(2)* esetekben a $k = 5l + r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4,$) választás miatt, bármelyik páros számjegy lehet; a *(3)* esetben a tízesek helyén mindig a 2 áll.

c) Az *(1)* és *(2)* alakú számok esetén a tízesek száma 4-gyel osztható, tehát a tízesek számának két utolsó jegyéből alkotott szám is osztható 4-gyel. (Pl.: $73^2 = 5329$; a tízesek száma 532, ami akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha a 32 is.) Így, ha a tízesek jegye 0, 4 vagy 8, akkor a százasok helyén páros számjegyet találunk, ha pedig a tízesek helyén a 2 vagy a 6 áll, akkor a százasok jegye páratlan, azaz *a százasok jegye a tízesek helyén álló jegy felével azonos paritású.*

A *(3)* alakú számok százasainak száma $k(k+1)$, tehát páros. A $k(k+1)$ 10-zel való osztási maradéka 0, 2 vagy 6, ezért *(3)*-ban a százasok helyén csakis ezek a jegyek állhatnak.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a felsorolt lehetőségek mindegyike megvalósul.

Giczi Margit, Sümeg

A megoldók száma: 17.

977. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex poliéder minden lapja centrálszimmetrikus, akkor a poliédernek legalább nyolc olyan csúcsa van, amely pontosan háromélű!

Megoldás: A lapok centrálszimmetriájából következően, minden lapnak páros sok oldala van. Ha tehát belátjuk, hogy minden konvex poliéderben a háromszöglapok és a háromélű szögletek számának összege legalább nyolc, akkor feladatunkat megoldottuk, hiszen a háromszöglapok száma most nulla.

Jelölje l_i a poliéder i-szögű lapjainak számát, c_i pedig azon csúcsok számát, amelyekre pontosan i darab él illeszkedik ($i \geqq 3$). Ha a lapok számát l, a csúcsok számát c és az élek számát e jelöli, akkor

(1) $$l = l_3 + l_4 + l_5 \ldots = \sum_{i=3} l_i$$

(2) $$c = c_3 + c_4 + c_5 \ldots = \sum_{i=3} c_i$$

továbbá

(3) $$2e = 3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \ldots = \sum_{i=3} i \cdot l_i$$

(4) $$2e = 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + \ldots = \sum_{i=3} i \cdot c_i,$$

mert a lapok, illetve csúcsok élszámának összege az élek számának kétszeresét adja, mivel minden él pontosan két lapon van, továbbá valamennyi él pontosan két csúcsot köt össze.

A konvex poliéder egyszerű, tehát *Euler* tétele miatt

(5) $$c + l = e + 2.$$

Szorozzuk (5) mindkét oldalát 4-gyel, és az így adódó egyenlet bal oldalába (1-et) és (2)-t, jobb oldalába (3)-at és (4)-et tegyük!

(6) $$\sum_{=3} 4l_i + \sum_{i=3} 4c_i = 8 + \sum_{i=3} i \cdot l_i + \sum_{i=3} i \cdot c_i$$

Ezt másként csoportosítva:

$$l_3+c_3 = 8+\sum_{i=4}(i-4)l_i+\sum_{i=4}(i-4)c_i =$$

$$= 8+(l_5+2l_6+3l_7+\ldots)+(c_5+2c_6+3c_7+\ldots).$$

A jobb oldali zárójeles összeg tagjai nemnegatív egészek, tehát

$$l_3+c_3 \geqq 8,$$

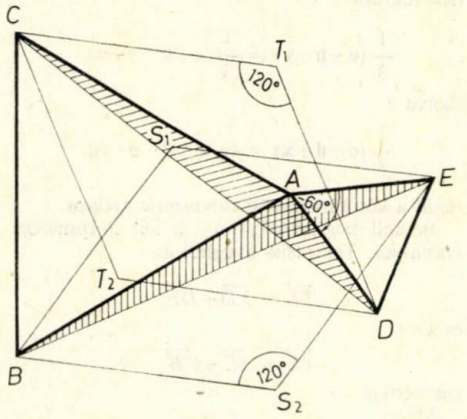
és ezt kellett igazolnunk.

Csorba Ferenc, Győr és Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 2.

978. Az ABC és ADE közös A csúcsú szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy a CDX és az EBY szabályos háromszögek súlypontja azonos, ha X, illetve Y pont a CD, illetve az EB megfelelő partján van!

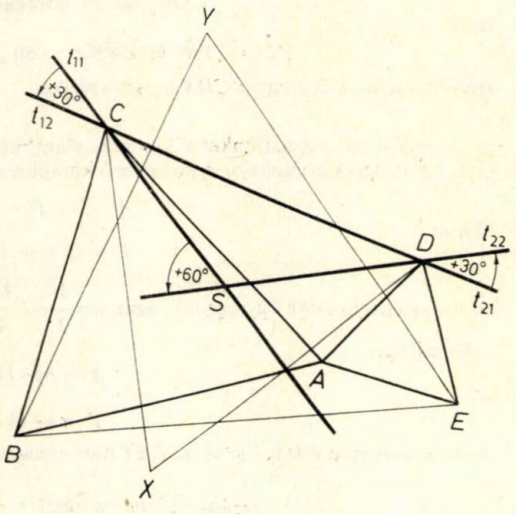
I. megoldás: Két lehetőséggel kell foglalkoznunk aszerint, hogy a két, feladatbeli háromszög körüljárása egyező, vagy ellentétes. Ez utóbbi esetben tekintsük a BE, illetve CD átlójú, 120°-os szögű BS_1ES_2, illetve CT_1DT_2 rombuszokat ($BS_1E\sphericalangle = CT_1D\sphericalangle = 120°$, *1. ábra*)!



1. ábra

Mivel az $ABE\triangle$ A körüli $-60°$-os elforgatottja az $ACD\triangle$, ezért rombuszaink is egymás A körüli $\pm 60°$-os elforgatottjai. Az elforgatás szöge a teljesszög egész számú többszörösétől különbözik, tehát a forgatásnak egyetlen fix pontja van, az A, ezért S_1, S_2, T_1, T_2 különböző pontok, nincs tehát a CD és a BE szakaszok fölé rajzolt szabályos háromszögek között azonos súlypontú, mivel e súlypontok az S_1, S_2, T_1, T_2 közül valók.

Legyen most a két háromszög azonos körüljárású (2. ábra). Mivel minden pontkörüli elforgatás végtelen sokféleképpen adható meg két, a pontra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözés szorzataként (ahol az egyenesek irányított szöge a forgatás szögének fele), a C csúcs körüli $+60°$-os forgatást adjuk meg a t_{11} és $t_{12}=CD$ egyenesekkel, ahol t_{11}-et $+30°$-os forgás viszi $t_{12}=CD$-be; a D csúcs körüli ugyanilyen forgatást pedig a $t_{21}=t_{12}=CD$ és a t_{22} egyenesekkel, s itt a $t_{21}=CD$ $+30°$-os elforgatottja legyen a t_{22}.



2. ábra

(Feltettük, hogy háromszögeink negatív körüljárásúak.)

A C és D csúcsok körüli $+60°$-os elforgatások szorzata:

$$(*) \qquad (t_{11}\cdot t_{12})(t_{21}\cdot t_{22}) = t_{11}\cdot t_{22},$$

azaz a t_{11} és t_{22} egyenesek közös S pontja körüli $+120°$-os elforgatás, mivel a $(*)$-beli transzformációk szorzata asszociatív és $t_{12}=t_{21}$ miatt a $t_{12}\cdot t_{21}$ az identikus leképezés. A C körüli $+60°$-os forgatás B-t az A-ba, a D körüli ugyanilyen forgatás A-t az E-be viszi, tehát ezek egymásutánja, az S körüli $+120°$-os forgatás, B-t az E-be viszi. Következésképpen S a BEY szabályos háromszög súlypontja. A $CDS\triangle$-ben két szög egyenlő, így $SC=SD$, és $CSD\sphericalangle = 120°$ miatt S a CDX szabályos háromszög súlypontja is.

Megfontolásunkból következik, hogy S a BE és a CD szakaszok felezőmerőlegeseinek olyan közös pontja, amelyből mindkét szakasz 120°-os szögben látszik. Nincs tehát lehetőség más közös súlypontra.

Kondor Judit, Budapest

II. megoldás: Jelölje a CD szakasz felezőpontját F, az EB szakasz felezőpontját H, az A pontnak F, illetve H pontra vonatkozó tükörképét Y, illetve X (3. ábra). Először azt látjuk be, hogy az EBY és a CDX háromszögek súlypontja közös.

Legyen a helyvektorok közös kezdőpontja az A, és jelölje valamely pontba vezető helyvektort a pont jelének megfelelő kisbetű.

Ekkor

$$\mathbf{d}+\mathbf{c}=\mathbf{y}=2\mathbf{f},$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{e}=\mathbf{x}=2\mathbf{h}.$$

Az $EBY\triangle$, illetve a $CDX\triangle$ súlypontjának helyvektora

$$\frac{1}{3}(\mathbf{e}+\mathbf{b}+\mathbf{y})=\frac{1}{3}(\mathbf{e}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}),$$

illetve

$$\frac{1}{3}(\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{x})=\frac{1}{3}(\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{b}),$$

tehát a két háromszög súlypontja azonos.

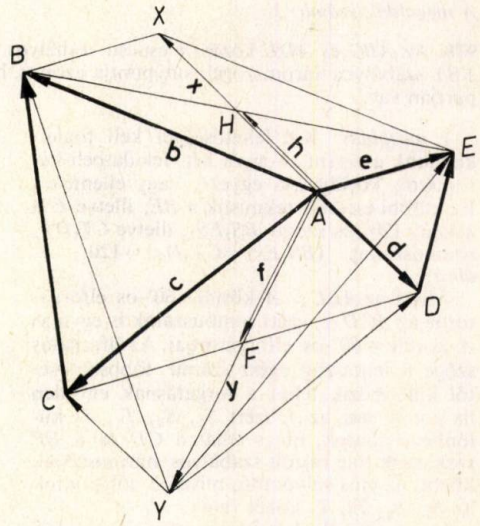
Be kell még lássuk, hogy a két háromszög szabályos. Tekintsük evégből az

$$\overrightarrow{YE}=\overrightarrow{YD}+\overrightarrow{DE}$$

és az

$$\overrightarrow{YB}=\overrightarrow{YC}+\overrightarrow{CB}$$

vektorokat.



3. ábra

Mivel

$$\overrightarrow{YD}=\overrightarrow{CA} \text{ és ennek } +60°\text{-os elforgatottja } \overrightarrow{CB},$$

továbbá a

$$\overrightarrow{DE}+60°\text{-os elforgatottja } \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{YC},$$

így az

$$\overrightarrow{YE}+60°\text{-os elforgatottja } \overrightarrow{YB},$$

tehát

$$|\overrightarrow{YE}|=|\overrightarrow{YB}| \text{ és } EYB\sphericalangle=60°, \text{ azaz a } BEY\triangle \text{ szabályos.}$$

Hasonlóan látható, hogy a $CDX\triangle$ is szabályos.

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

III. megoldás: Feladatunkat a komplex számsíkon oldjuk meg. Nem megy az általánosság rovására, ha az egyes pontokhoz a következő komplex számokat rendeljük:

$$A=0,\quad D=1,\quad B=b.$$

Ekkor

$$E=\varepsilon,\quad C=b\varepsilon,$$

ahol ε az első hatodik egységgyök, azaz $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ennélfogva

$$X=b\varepsilon+(1-b\varepsilon)\varepsilon$$

és

$$Y=\varepsilon+(b-\varepsilon)\varepsilon,$$

következésképp a CDX, illetve az EBY háromszögek súlypontja

$$\frac{1}{3}(b\varepsilon+1+b\varepsilon+\varepsilon-b\varepsilon^2)=\frac{1}{3}(\varepsilon+b\varepsilon+1+b(\varepsilon-\varepsilon^2)),$$

illetve

$$\frac{1}{3}(\varepsilon+b+\varepsilon+b\varepsilon-\varepsilon^2)=\frac{1}{3}(\varepsilon+b\varepsilon+b+(\varepsilon-\varepsilon^2)).$$

Figyelembe véve, hogy $1-\varepsilon+\varepsilon^2=0$, adódik a két súlypont azonossága.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 13.

979. Oldjuk meg az alábbi négyismeretlenes egyenletrendszert:

$$xy+z=-1,\quad yz+u=-3,\quad zu+x=1,\quad ux+y=2.$$

Surányi János, Budapest

Megoldás: A négy egyenlet összeadva

$$xy+yz+zu+ux+x+y+z+u=-1,$$

s ebből

$$(*)\qquad (x+z+1)(u+y+1)=0$$

egyenlethez jutunk. Eredeti egyenletrendszerünk megoldásai tehát a $(*)$ megoldásai közül valók.

Két esettel kell foglalkoznunk.

I. eset: $x+z+1=0$.

Ebből $z=-1-x$ helyettesítéssel, eredeti egyenletrendszerünk így alakul:

$$(1)\quad x(y-1)=0$$

$$(2)\quad y(x+1)-u=3$$

$$(3)\quad x-u(x+1)=1$$

$$(4)\quad ux+y=2.$$

Ha most (1)-ből $x=0$, akkor (4) miatt $y=2$ és (3) szerint $u=-1$, továbbá $z=-1$.

Ha viszont $x\neq 0$, akkor (1) miatt $y=1$, tehát előbbi egyenletrendszerünkből

$$(2')\quad x-u=2$$

$$(3')\quad x-ux-u=1$$

$$(4')\quad ux+1=2.$$

Ennek két független egyenletéből adódó másodfokú egyenlet gyökei

$$x_2=1+\sqrt{2},\quad u_2=\sqrt{2}-1,$$

illetve

$$x_3=1-\sqrt{2},\quad u_3=-\sqrt{2}-1.$$

Ezekhez

$$y_2=1,\quad z_2=-2-\sqrt{2},$$

illetve

$$y_3=1,\quad z_3=-2+\sqrt{2}$$

tartoznak.

II. eset: $y+u+1=0$.

Ebből $u=-y-1$. Helyettesítsük ezt eredeti egyenletrendszerünk második és harmadik egyenletébe. Ezek összegéből

$$z=x-y+1$$

adódik. Tegyük ezt eredeti egyenletrendszerünk első és második egyenletébe:

$$(5)\quad xy+x-y=-2,$$

$$(6)\quad xy-y^2=-2.$$

Ezek különbségéből

$$x=y-y^2.$$

Ezért a (6)-ból

$$y^3 = 2,$$

tehát

$$y_4 = \sqrt[3]{2},\ y_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ y_6 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ezért

$$x_4 = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ x_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x_6 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$z_4 = -\sqrt[3]{4}+1,\ z_5 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z_6 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

végül

$$u_4 = -1-\sqrt[3]{2},\ u_5 = -1-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$u_6 = -1-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Egyenletrendszerünknek a kapott négy valós és két komplex számnégyes eleget tesz.
Ezeket egybegyűjtve:

x	y	z	u
0	2	-1	-1
$1+k\sqrt{2}$	1	$-2-k\sqrt{2}$	$-1+k\sqrt{2}$
$\varepsilon\sqrt[3]{2}-\varepsilon^2\sqrt[3]{4}$	$\varepsilon\sqrt[3]{2}$	$-\varepsilon^2\sqrt[3]{4}+1$	$-1-\varepsilon\sqrt[3]{2}$
$k=1$ vagy -1; $\varepsilon=1$ vagy $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$			

Szánthó Gyula, Gyula és Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 19.

980. Legyen α valós szám! Igazoljuk, hogy az

$$a_1 = \alpha,$$

$$a_n = \cos a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

sorozat konvergens és határértéke független az α megválasztásától!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

I. megoldás: Tekintsük az

$$a = \cos a$$

egyenletet. A 4. ábráról, a függvények ismeretében látható, hogy ennek egyetlen gyöke van, s ez a [0, 1]-ben van. Jelölje a továbbiakban a ezt a gyököt.
Definiáljuk most a következő (b_n) sorozatot:

$$b_1 = \alpha$$

$$b_i = a_i - a \quad (i \geqq 2).$$

Ekkor

$$b_i = a_i - a = \cos a_{i-1} - a = \cos a_{i-1} - \cos a.$$

Legyen

$$a_1 = \alpha \quad (\alpha \text{ tetszőleges valós szám}),$$

így

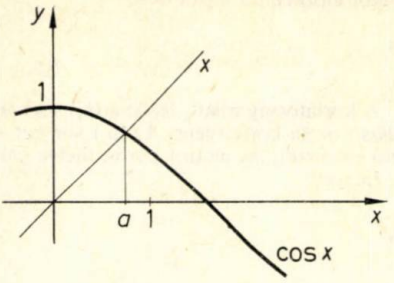
$$-\frac{\pi}{2} < -1 \leqq a_2 = \cos a_1 = \cos \alpha \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$$

és

$$a_i = \cos a_{i-1} \quad (i \geqq 3)$$

miatt

(*) $$0 < a_i < 1 \quad (i \geqq 3).$$



4. ábra

A (b_i) sorozat *korlátos*, mert

$$|b_i| = |a_i - a| = |\cos a_{i-1} - \cos a| \leqq 2 \quad (i \geqq 2)$$

miatt

$$|b_i| \leqq \min(2, \alpha)$$

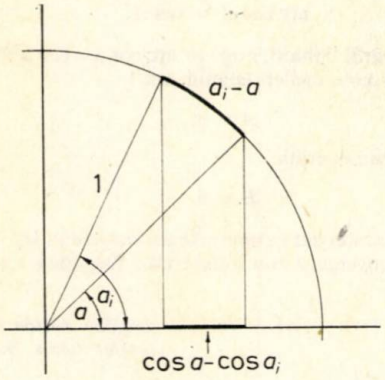
minden $i \geqq 1$-re.

A (b_i) sorozat páros, illetve páratlan indexű tagjai *monoton* részsorozatot alkotnak.

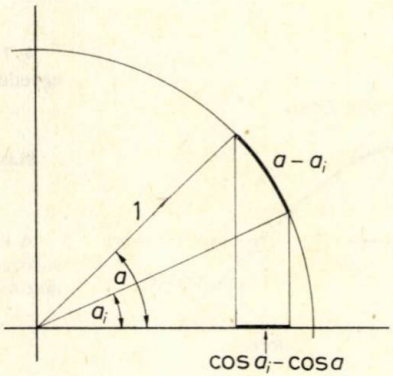
Ugyanis, ha

$$a_i \geqq a,$$

akkor az 5. ábráról is leolvashatóan



5. ábra



6. ábra

(1) $$a_i - a \geqq \cos a - \cos a_i = a - a_{i+1} \quad (\geqq 0)$$

Ha pedig

$$a \geqq a_i,$$

akkor a 6. ábrából

(2) $$a - a_i \geqq \cos a_i - \cos a = a_{i+1} - a \quad (\geqq 0)$$

Ezek szerint, ha

$$b_2 = a_2 - a \geqq 0,$$

akkor (1)- és (2)-ből

$$a_2 - a \geqq a - a_3 \geqq a_4 - a \geqq a - a_5 \geqq \ldots \geqq a_{2k} - a \geqq a - a_{2k+1} \geqq \ldots,$$

tehát

$$b_2 \geqq b_4 \geqq b_6 \geqq \ldots \geqq b_{2k} \geqq b_{2k+2} \geqq \ldots \geqq 0$$

és

$$b_3 \leqq b_5 \leqq b_7 \leqq \ldots \leqq b_{2k-1} \leqq b_{2k+1} \leqq \ldots \leqq 0$$

Ha viszont

$$b_2 = a_2 - a \leqq 0,$$

akkor előzőekhez hasonlóan

$$b_{2i} \leqq b_{2i+2} \leqq 0$$

és

$$b_{2i-1} \geqq b_{2i+1} \geqq 0 \quad (i \geqq 1).$$

A korlátosság miatt, tehát a (b_i) sorozatnak mind a páros, mind a páratlan indexű tagjaiból álló részsorozata konvergens. Az (a_i) sorozat elemei az a konstansban különbözek a (b_i) sorozat megfelelő elemeitől, így az (a_i) páros, illetve páratlan indexű elemeiből alkotott részsorozat konvergens.

Legyen

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = A$$

és

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = B.$$

A cosinusfüggvény folytonossága miatt:

$$\lim_{k\to\infty} \cos a_{2k} = \cos A$$

és

$$\lim_{k\to\infty} \cos a_{2k+1} = \cos B,$$

másrészt

$$\cos a_{2k} = a_{2k+1}, \quad \text{így} \quad B = \cos A$$

és

$$\cos a_{2k+1} = a_{2k+2}, \quad \text{tehát} \quad A = \cos B.$$

Ezek szerint

$$A = \cos(\cos A),$$

azaz

$$\arccos A = \cos A.$$

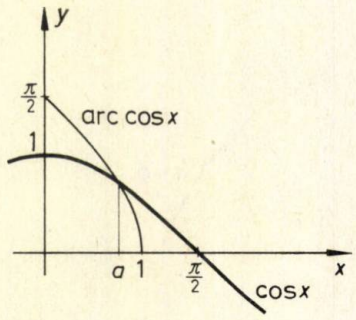
A 7. ábráról látható, hogy az $\arccos x = \cos x$ egyenlet egyedül az $x = a$ mellett teljesül, ezért

$$A = a.$$

Hasonlóan nyerjük

$$B = a.$$

A két részsorozat határértéke azonos tehát, így az (a_i) sorozat konvergens és a határértéke független α megválasztásától.



7. ábra

Bogdán Zoltán, Cegléd
Hoffer János, Budapest

II. megoldás: Felhasználjuk a következő ismert tételt:
Ha $x \mapsto g(x)$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett és differenciálható függvény, továbbá $g(x) \in [a, b]$ és

$$|g'(x)| \leqq q < 1 \quad (a < x < b),$$

akkor az

$$x_n = g(x_{n-1})$$

iterációs eljárás konvergens független attól, hogy milyen $x_0 \in [a, b]$ kezdőértéket választottunk, és a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi$$

határérték az

$$x = g(x)$$

egyenlet egyetlen gyöke az $[a, b]$-n.

(*Lásd:* Obádovics J. Gyula: Gyakorlati számítási eljárások. 79. oldal.)

Feladatunkban

$$g(x) = \cos x,$$

és bármely α választásra, mint az I. megoldásban is láttuk

$$0 < a_n < 1 \quad (n \geqq 3).$$

A cosinusfüggvény a $[-1, 1]$-ban differenciálható és

$$|\cos' x| = |-\sin x| = |\sin x| \leqq q < 1 \quad x \in (-1, 1),$$

ezért a megadott sorozat konvergens α-tól függetlenül és határértéke az

$$x = \cos x$$

egyetlen egyenlet gyöke a $[-1, 1]$-ben. ($x \approx 0{,}739$)

Bencze Mihály, Brassó
Gógh József, Gúta

A megoldók száma: 10.

A megoldók névsora (975—980.)

Ambrus Gabriella, Budapest (975., 978—980.); Bagi Gábor, Barcs (975.); Bencze Mihály, Brassó (975., 976., 979., 980.); Bíró Béla, Barót (979.); Bogdán Zoltán, Cegléd (975., 976., 978—980.); Borsovszky Rudolf, Budapest (976.); Csorba Ferenc, Győr (975—977., 979.); Csörsz Sándor, Dunakeszi (975., 976., 978—980.); Deák Imre, Székelyudvarhely (978., 979.); Giczi Margit, Sümeg (975., 976., 978., 979.); Gógh József, Gúta (975., 976., 978., 980.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (975., 976.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (975., 976., 978.); Halász Ferencné, Budapest (979.); Hoffer János, Budapest (975., 979., 980.); Hornyák Pál, Érsekújvár (975., 976.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (975., 976., 978. 3 mód, 979.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (975., 976., 980.); Kamarás Lajos, Pécs (975., 976., 977., 978. 2 mód, 979., 980.); Kondor Judit, Budapest (976., 978.); Kormos Gizella, Sümeg (975., 979.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (975.); Dr. Major Pál, Budapest (975., 979.); Major Piroska, Budapest (979.); Máté Bálint, Pécs (975., 976., 978.); Méri Béla, Budapest (975.); Molnár József, Szombathely (979.); Moyzes Károly, Szeged (975.); Szánthó Gyula, Gyula (975., 976., 978., 979.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (975., 976., 978—980.).

Közlemény
a Nemzetközi Matematikai Kongresszus elhalasztásáról

Az 1982. évi Nemzetközi Matematikai Kongresszus Szervező Bizottsága f. év április havában az alábbi tájékoztatást tette közzé:

A Nemzetközi Matematikai Unió Végrehajtó Bizottsága 1982. április 1-én és 2-án Párizsban megtartott ülésen úgy döntött, hogy az 1982. augusztusára tervezett Nemzetközi Matematikai Kongresszus lebonyolítását 1983. augusztusára halasztja el,

A Kongresszus újonnan kitűzött időtartama 1983. augusztus 16—24., színhelye azonban Varsó marad.

A jelen év végén közzéteendő harmadik tájékoztató tartalmazni fogja a Kongresszusra vonatkozó tudnivalókat, a meghívott előadók jegyzékét és az új jelentkezési űrlapokat.

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 5.* (83 001) 27,50

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (83 020) ..... 39,—

Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—

Dr. Korányi Erzsébet: *Tanári kézikönyv. Matematika I—II.* (84 048) ..... 31,—

M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi I. osztályos Matematika munkatankönyvhöz* (84 060) 9,50

M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi II. osztályos Matematika munkatankönyvhöz* (84 070) ..... 7,—

M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi III. osztályos Matematika munkatankönyvekhez* (84 081) 9,50

Bartal—Jakab—Kántorné: *Ismerkedés a kísérleteinkkel.* Új utak a matematika tanításában (52 522/4) 29,50

Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) ..... 9,—

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

Bedő László: *Függvények* (19 016) 20,50

Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243) ..... 12,—

Vigassy Lajos: *Egybevágósági transzformációk a síkban és térben* (29 247) 9,50

Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) ..... 17,—

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Hámori Miklós: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Győző: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika II. (29 217) 12,50

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* (52 659) ..... 35,—

Péter Rózsa: *Játék a végtelennel.* Matematika kívülállóknak (52 489) ..... 31,—

Élő matematika 1. *Tanulmányok.* Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Élő matematika 2. Jánossy—Tusnádi: *Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—

Élő matematika 3. Gergely—Hódi és mások: *A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) 13,—

Élő matematika 4. Korányi Erzsébet: *Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) 18,50

Élő matematika 5. Beckné—Hódi és mások: *Kamatszámítástól a Bolyai-geometriáig* (92 347/5) 21,50

Lukács Ottó: *Operációkutatás* (52 899) ..... 71,—

Beszerezhetők

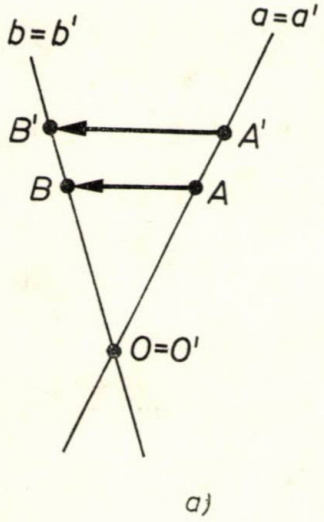
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053. Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Könyvesboltban (1051. Bp., Október 6. u. 8.)

Ára: 5,50 Ft

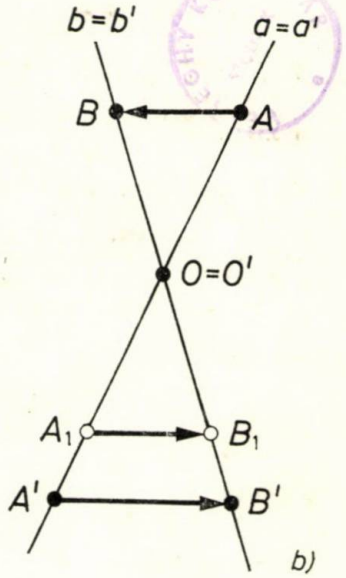
INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



a)



b)

1982. augusztus * XXIX. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-1539 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055. Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Kallós Károly: Ekvivalens tételek 97
Dr. Rédling Elemér: Alakzatok hasonlósága 101
Dr. Horváth Jenő: Szabályos sokszögek néhány extremális tulajdonsága euklideszi és hiperbolikus síkon, valamint gömbfelületen 106
Kun Péter: Egy lehetőség a matematikafeladatok pontozására 112
Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 33. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán 116
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára..... 122

FELADATOK 124

СОДЕРЖАНИЕ

Каллош Кароль: Равносильные теоремы 97
Д-р Редлинг Элемер: Подобие фигур.... 101
Д-р Хорват Енё: Некоторые экстремальные свойства регулярных многогранников на евклидовой и гиперболической плоскости и на сфере 106
Кун Пэтэр: Одна возможность оценить задачи в математике с очками 112
Ходи Эндре: Участие венгерских учеников в Тридцатьтретьем Ежегодном Среднешкольном Конкурсе по Математике 116
Конкурс Математического Общества им. Яноша Бояи для преподавателей математики 122

ЗАДАЧИ 124

INHALT

Kallós, Károly: Äquivalente Sätze 97
Dr. Rédling, Elemér: Ähnlichkeit von Figuren 101
Dr. Horváth, Jenő: Einige extremen Eigenschaften der regelmäßigen Vielecke auf der euklidischen und hyperbolischen Ebene, gleichwie auf einer Kugelfläche 106
Kun, Péter: Eine Möglichkeit zur Punktbewertung der Mathematikaufgaben..... 112
Hódi, Endre: Die Teilnahme ungarischer Schüler am 33-sten Jährlichen Mathematischen Examen der Mittelschulen 116
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 122

AUFGABEN 124

A matematikatanítás MÓDSZERE

KALLÓS KÁROLY
gimnáziumi tanár
Győr

Ekvivalens tételek

A matematika tételei — célszerűségből és megszokásból — szinte minden tankönyvben azonos formában jelentkeznek. A tétel sokarcú logikai alakzat, a megfogalmazás során előnyhöz jut az, ami egyszerűbb, áttekinthetőbb. Megszokott, hogy a tétel algebrai alakját a gyakrabban keresett mennyiségre explicit, vagy azt megközelítő formában tanítjuk meg. Pitagorasz tételét még a tréfás emlékeztető rigmus is az átfogó négyzetére mondja ki, hasonlóan a cosinustételt az egyik oldal négyzetére, nem a vonatkozó szög cosinusára írjuk fel rögzítés, megtanulás céljából.

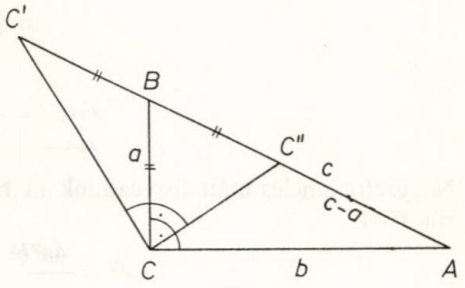
Ha a tételt hordozó egyenleten azonos átalakításokat végzünk, olyan állításokkal találkozunk, amelyek a tétel egy-egy rejtettebb zugába állítják a gondolkodás reflektorfényét. A tételek ilynemű elemző-összehasonlító megismertetése az oktatásban nem középponti kérdés, de fontossá válhat akkor, ha az átalakítással rokonságot találunk más tételekhez, fejezetekhez. Vizsgáljunk meg néhány gyakran használt tételt a vázolt program szerint!

Pitagorasz tétele

A tétel általános jelentkezési formája, amely szerint derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével: $a^2+b^2=c^2$; például így írható más alakban:

$$b^2 = (c-a)(c+a).$$

Egyszerűség kedvéért a háromszög legyen nem elfajult! Ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy az egyik befogó mértani középarányos azon két szakasz között, amelyet úgy kapunk, hogy az átfogóhoz először hozzáadjuk a másik befogót, utána pedig az átfogóból levonjuk. További elemzés céljából álljon itt a szerkesztési ábra:



1. ábra

B körül a sugarú körívvel, c egyenesét (két helyen) elmetszük. A hányados alakból

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

leolvasható, hogy $ACC' \triangle \sim AC''C \triangle$.

Ezen az úton továbblépve a derékszögű háromszög kerületét aránypárba kapcsolhatjuk:

$$\frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c-a}{c-a}.$$

A jelölt oldalak — mint szakaszok — pozitívak, hasonlóan a nevezők is. Ha az aránypár két oldalát nem növeljük (mint az előbb), hanem csökkentjük eggyel, akkor olyan tételformához jutunk, amelyről nem könnyen látható, hogy miből indultunk ki, ezért bővítsünk $(a+b+c)$-vel:

$$\frac{(a+c)^2-b^2}{b} = \frac{(a+b)^2-c^2}{c-a}.$$

A két számláló sok kapcsolatában ismert. Olyan formai jegy, ami arra utal, hogy jelen van a derékszögű háromszög, vagy számításaink során derékszögű háromszögre építettünk (például Héron magasság-tétele).

A cosinustétel

A háromszögre vonatkozó tételt írjuk fel c^2-re:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab \cdot \cos\gamma.$$

Legyen β is, γ is hegyesszög! Az a-hoz tartozó magasság az a oldalt két szakaszra vágja. Jelöljük a b oldal vetületét a'-vel! Ekkor a kiindulási egyenlet így alakul:

$$c^2 = a^2+b^2-2a \cdot a'.$$

Ebből rendezéssel, szorzattá alakítással a derékszögű háromszögre felírtakhoz hasonlót kapunk.

Vizsgáljuk meg most a tétel területkapcsolatát! A háromszög területét a trigonometrikus területformulával írjuk fel:

$$\sin\gamma = \frac{2t}{ab},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Négyzetre emelés után összeadunk (a bal oldalak négyzetének összege 1), kifejezzük t^2-et:

$$t^2 = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{16}.$$

A számlálót szorzattá alakítjuk (minden tényező pozitív), majd négyzetgyököt vonunk:

$$t = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\cdot(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}.$$

Azaz: a két trigonometrikus tétel együttes „mondanivalója" a **Héron-tétel.**

A cosinustétellel rokon sinusos tétel adódik a sinustétel és a cosinustétel előző mintájú ötvözéséből:

$$\sin\gamma = \frac{c}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2+b^2 = c^2 \pm 2b\sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2\alpha}.$$

Ez a leszármaztatott összefüggés is csak 3 oldallal és egy szöggel operál, de nehézkesebb a cosinustételnél, ezért csak kuriózum — a cosinustétel sinusos megfelelője.

A cosinustételnek van olyan változata, amely a cosinustétellel azonos funkciójú, de sinust tartalmaz. Hasonlóan: a sinustételnek is van ilyen „fordított" változata:

$$\frac{a\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha}{a+b} = \frac{a-b}{a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha}; \quad a\cdot\cos\beta \neq b\cdot\cos\alpha.$$

Itt a két oldal négyzetének különbségére kaphatnánk felvilágosítást, ha nem maradna benne az oldal a szögfüggvény mellett.

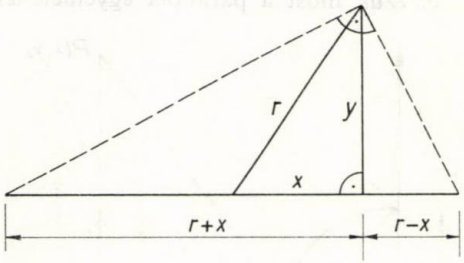
A kör egyenlete

Az origó középpontú kör egyenletéből fejezzük ki y^2-et:

$$y^2 = (r+x)\cdot(r-x).$$

Az ábra szerint y a $2r$ átfogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, ezért az összefüggés a derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtétellel is megfogalmazható.

Az y mértani közép tulajdonsága más módon is felhasználható. Alakítsuk az előbbi egyenletet aránypárrá:



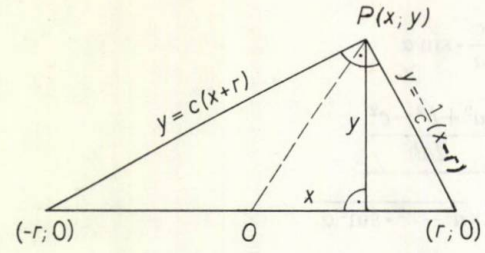
2. ábra

$$\frac{y}{r+x} = \frac{r-x}{y}; \quad y > 0.$$

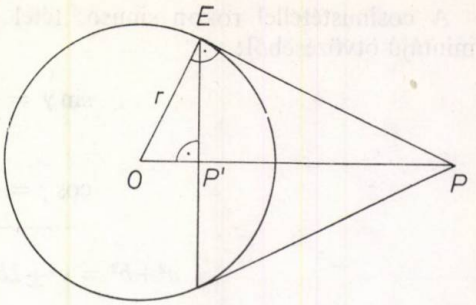
Ez a hányados egy pillanatra rögzítettnek tekinthető, jelöljük c-vel és tekintsük paraméternek. Ekkor mindkét oldal egy-egy lineáris egyenletet ad:

$$y = c(x+r) \quad \text{és} \quad y = -\frac{1}{c}(x-r); \quad c > 0.$$

A két függvény grafikonja az ábra szerinti két merőleges egyenes. Az egyenesek kölcsönös merőlegessége c minden megengedett értékére fennáll, az egyenesek metszéspontja pedig c változtatása közben leírja a Thalész-kör pozitív felét.



3. ábra



4. ábra

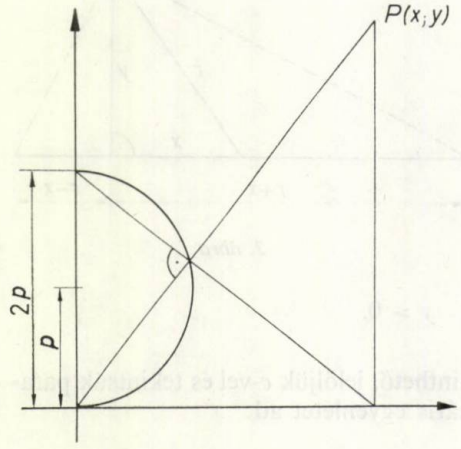
Az inverzió definíció-egyenlete a befogótételhez kapcsolódik.
Ha körhöz külső pontból érintőt szerkesztünk, a Thalész-kör 2 helyen metszi az adott kört. A középpont, a külső pont és az érintési pont által meghatározott derékszögű háromszög egyik befogója a felvett kör sugara. Az erre felírt befogótétel egyúttal az inverzió definíciója:

$$r^2 = OP' \cdot OP.$$

A parabola egyenlete

Könnyebb kezelhetőség kedvéért válasszuk azt a parabolát, amelynek egyenlete: $x^2 = 2py$. Közvetlenül látható, hogy a parabolapont abszcisszája mértani középarányos az ordináta és a kétszeres paraméter között. Ez az ilyen helyzetű parabola definíciós tulajdonsága; módot ad a paraméter megszerkesztésére, ha a koordináta-rendszerben felvesszük a parabola egy pontját.

Nézzük most a parabola egyenletének aránypár-alakját:



5. ábra

$$\frac{x}{2p} = \frac{y}{x}; \quad x \neq 0.$$

A nem elfajult parabola origón kívüli pontját összekötjük az origóval, majd megrajzoljuk az x és $2p$ befogók által meghatározott derékszögű háromszöget; ez az ábra szerinti két háromszög hasonló. A merőleges szárú szögek tételének megfordítása miatt a két átfogó merőleges egymásra, ezért egy „mini-tétel" lehet a végkövetkeztetésünk:

Az aránypárral meghatározott két derékszögű háromszög átfogójának metszéspontja — miközben a pont végigfut a fél (pozitív) parabolaíven — egy $2p$ átmérőjű félkörívet ír le, amelyhez az átmérő végpontjai nem tartoznak hozzá. Az ábra tükrözhető az ordinátatengelyre.

A kiragadott tételek, tények, függvények egyszerű szerkezetűek, és szinte uralkodó szerepű bennük a mértani közép tulajdonság. Összegezve megállapíthatjuk, hogy a tételek más és más köntösben jelentkezhetnek; a jelentkezési forma valamilyen tulajdonságot elsődlegesen kiemel, másokat (sokat) elnyom. A matematikai jelö-

lésekhez hasonlóan a tételek kimondása is egyszerűsödött; idők folyamán a könnyedség és a könnyed megjegyezhetőség egymásra talált. Bizonyos egyöntetűség, szimmetria (vagy logikai szimmetria), esetleg „jó ritmus" bizonyos formákat uralkodóvá tett, másokat a perifériára szorított. Furcsa, de nem logikátlan kérdés, hogy miért szerepelnek tételek közel azonos kimondásban, azonos alakban a tankönyvekben; ennek eléggé összetett, de racionális oka van.

DR. RÉDLING ELEMÉR
főiskolai docens
KKVMF SZI, Székesfehérvár

Alakzatok hasonlósága

A középiskolai geometriaanyagban centrális szerepet tölt be a ponttranszformáció fogalma. A tapasztalatok azt mutatják, hogy geometriaoktatásunkban lényeges előrelépést jelentett a transzformációk szerint rendezett tanítási menet. Azonban nem feledkezhetünk meg a még *megoldásra váró problémákról* sem.

A transzformációk fonalán haladó geometriatanítás több olyan kérdést is felvetett, amelyre választ kell keresnünk. A nehézségek feltárását, s a megoldások megkeresését most különösen időszerűvé teszi az, hogy *új tantervek* bevezetésére került sor.

Cikkünkben az *alakzatok hasonlóságának* tárgyalásával összefüggő problémákkal foglalkozunk. Felvázoljuk az e téren jelentkező nehézségeket, s néhány ötletet adunk a megoldáshoz.

Az *alakzatok egybevágósága speciális* esete az alakzatok hasonlóságának, ezért a hasonló idomokkal kapcsolatos általánosabb észrevételeink az egybevágó alakzatokra is vonatkoznak.

Az alakzatok hasonlósága (egybevágósága) geometriaanyagunk egyik alapvető fogalma. Erre a tananyag feldolgozásában rendszeresen támaszkodunk. (Gondoljunk itt például a különböző szerkesztési feladatokra!)

Hosszú évek tanítási tapasztalatai azt tükrözik, hogy a tanulók tudatában *nem kristályosodik ki* megfelelőképpen az *alakzatok hasonlóságának* fogalma, *nem különül el* ugyanis egymástól a *hasonlósági transzformáció* és az *alakzatok hasonlóságának* fogalma. A tanulók a *„hasonlóság"* elnevezéssel e két fogalom homályos „keverékét" jelölik. „Összemosódik" tehát egy ponttranszformáció és egy — az alakzatok körében értelmezett — reláció fogalma. Ugyanezt mondhatjuk az *egybevágósági* transzformáció és az *alakzatok egybevágósága* fogalompárról is. Ha azonban ilyen alapvető fogalmak tisztázatlanok maradnak, akkor helyes *transzformációs szemléletről* sem beszélhetünk, hiszen a tanulók *nem* tekintik a transzformációkat (ponthalmazok körében értelmezett) *függvénynek*.

A tanterveknek a geometriaanyaggal kapcsolatos célkitűzései is a mondott problémakör megoldását sürgetik.

Az említett fogalmak megkülönböztetésére a következőket ajánljuk.

a) A tanításban az alakzatok hasonlóságának (egybevágóságának) definiálására *csak akkor* kerüljön sor, amikor már a hasonlósági (egybevágósági) transzformáció fogalma kellőképpen kikristályosodott!

b) Összhangba kell hozni egymással az általános és a középiskolai geometriatanítás koncepcióját! A tapasztalatok szerint komoly nehézséget jelent a tanulóknak például az alakzatok hasonlóságára vonatkozó középiskolai definíció megtanulása, ha az általános iskolában jól bevésték emlékezetükbe azt a meghatározást, hogy „két idom hasonló, ha megfelelő oldalainak aránya egyenlő, és a megfelelő szögek is egyenlők". A rezisztencia ugyanis többnyire erősebb, mint az asz-

szimilálódási képesség. (Lásd még az [5]-ben elmondottakat is!)

c) Pontosan kell megadni *a hasonlóság*, illetve az *egybevágóság* kifejezések *jelentését!* (Lásd például: [3], 41. oldal, illetve 109. oldal!)

d) Mutassunk a tanulóknak olyan alakzatpárokat, amelyeket *többféle* hasonlósági (egybevágósági) transzformációval feleltethetünk meg egymásnak! A tanulók így rádöbbenhetnek arra, hogy *két alakzat hasonlósága (egybevágósága) nem kötődik egyetlen transzformációhoz: a szóban forgó fogalmak „szétválnak" egymástól.*

A továbbiakban ilyen alakzatpárok vizsgálatával foglalkozunk. Fontos didaktikai elvnek tartjuk, hogy a tárgyalásra olyan helyzetű alakzatpárokat válasszunk, amelyekhez a tanulók *könnyen* találnak a feltételeknek megfelelő és egymástól *különböző* transzformációkat. Nem szükséges az összes megfelelő transzformációt meghatározni, hiszen ez hosszadalmas munka lenne, így éppen a lényegről terelődne el a figyelem.

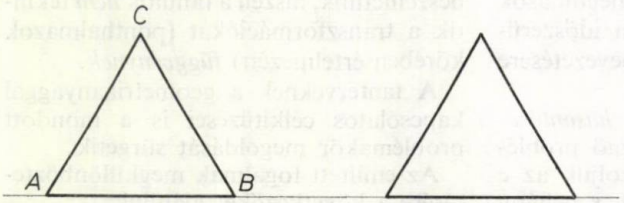
Először megadjuk az alakzatok hasonlóságának és egybevágóságának definícióját:

D_e: *Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikhoz rendeli.*

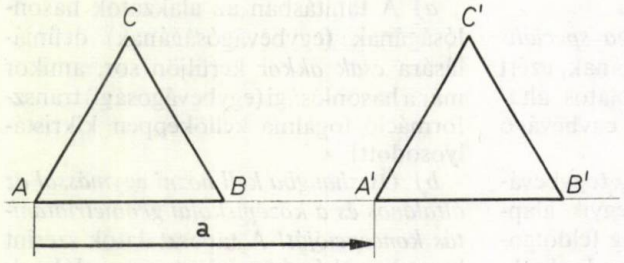
D_h: *Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikhoz rendeli.*

Egybevágó alakzatok

1. Rajzoljunk le egymás mellé az 1. ábrának megfelelően két szabályos háromszöget (egy-egy oldaluk közös egyenesre esik, az oldalak egyenlők)! Az egyik háromszög csúcsait még nem betűztük meg; ezzel is hangsúlyozni akarjuk, hogy *a két alakzatot még nem rendeltük egymáshoz.*



1. ábra

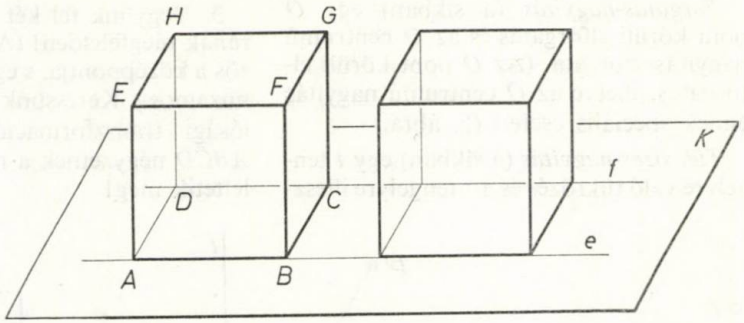


2. ábra

Az ábra síkjának hat olyan, önmagára való egybevágósági leképezése van, amely az egyik alakzatnak a másikat feleltheti meg. Ilyen transzformáció például a 2. ábrán szemléltetett eltolás, a két alakzat legközelebbi csúcsait összekötő szakasz felezőmerőlegesére való tükrözés stb. Mindez összhangban áll azzal, hogy hatféleképpen betűzhetjük meg a háromszög csúcsait, a háromszög hat különböző módon képezhető le önmagára.

A feladat feltételeinek megfelelő transzformációk közül három a körüljárás irányát megtartja, három pedig megváltoztatja.

2. Adott két olyan kocka, amelyek élei egyenlők. Helyezzük el a két kockát úgy, hogy egy-egy lapjuk közös síkon legyen, s egy-egy élük egy egyenesre essen a 3. ábrának megfelelően! Keressünk a tér egybevágósági transzformációi közül olyanokat, amelyek az egyik kockához a másikat rendelik!

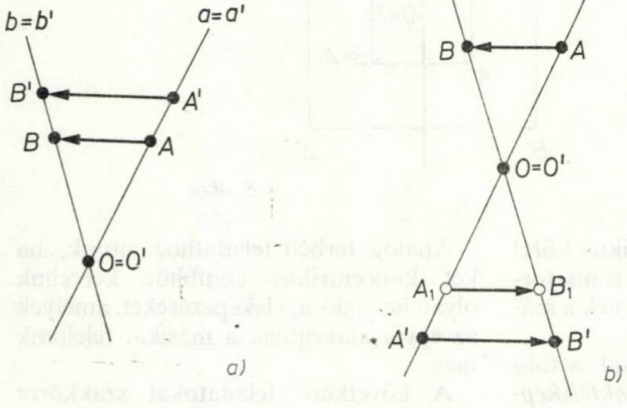


3. ábra

Belátható, hogy feladatunknak 48 különböző megoldása van (eltolás, síkra vonatkozó tükrözés, középpontos tükrözés stb.). Az A csúcsnak ugyanis 8 különböző képe lehet, egy ilyen kép kiválasztása után a B-hez 3 különböző csúcs rendelhető, az A és B képének rögzítése esetén C képe még kétféleképpen választható meg. A többi csúcs képét az előbbi hozzárendelések már egyértelműen meghatározzák, hiszen szomszédos csúcs képe is csak szomszédos csúcs lehet. A leképezések közül 24 az orientációt megtartja, 24 pedig megváltoztatja.

A feladatok megoldása kapcsán most nem célszerű azt a kérdést feszegetni, hogy mit is jelent a szakaszok egyenlősége. Erről a fogalomról ugyanis megfelelő empirikus képük van a tanulóknak. (Ha definiálni akarjuk ezt a fogalmat, akkor az ún. *mozgásaxiómákra* lehet támaszkodni — lásd például: [3], 11. oldal!).

Hasonló feladatokat például a [8]-ban találhatunk.



4. ábra

Hasonló alakzatok

A további feladatok tárgyalása előtt néhány definíciót fogalmazunk meg.

A *középpont (centrum)* olyan fixpont, amelyen áthaladó minden egyenes fix.

Középpontos hasonlóság a tér, illetve a sík olyan hasonlósági transzformációja, amelynek van középpontja (centruma) (4. ábra).

A *nagyítás* olyan középpontos hasonlóság, ahol a középpont egyetlen pontot sem választ el a képétől (4.*a)* ábra). (Ez az elnevezés összhangban van a geometriai optika szóhasználatával. A nagyítás fogalmába az ún. kicsinyítést és az azonos leképezést is beleértjük.)

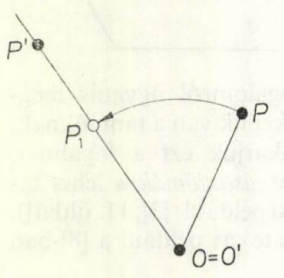
Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban a *nagyítás* helyett a *nyújtás* elnevezés is használatos. Gyakori az

is, hogy a nagyítást *középpontos hasonlóságnak* mondják, vagyis az előbb értelmezett középpontos hasonlóság fogalmát egy speciális esetre szűkítik le.

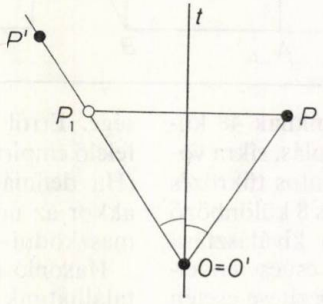
Forgatás-nagyítás (a síkban) egy O pont körüli elforgatás és az O centrumú nagyítás szorzata. (Az O pont körüli elforgatás, illetve az O centrumú nagyítás ennek speciális esete.) (5. ábra.)

Tükrözés-nagyítás (a síkban) egy t tengelyre való tükrözés és a t tengelyre illeszkedő O középpontú nagyítás szorzata. (A t tengelyre való tükrözés ennek speciális esete, az O centrumú nagyítás azonban nem.) (6. ábra.)

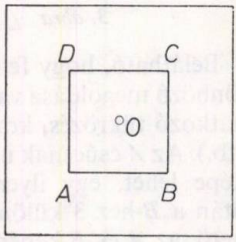
3. Vegyünk fel két négyzetet a 7. ábrának megfelelően! (A négyzeteknek közös a középpontja, s egy-egy oldaluk párhuzamos.) Keressünk *különböző* hasonlósági transzformációkat, amelyek az $ABCD$ négyzetnek a másik négyzetet feleltetik meg!



5. ábra

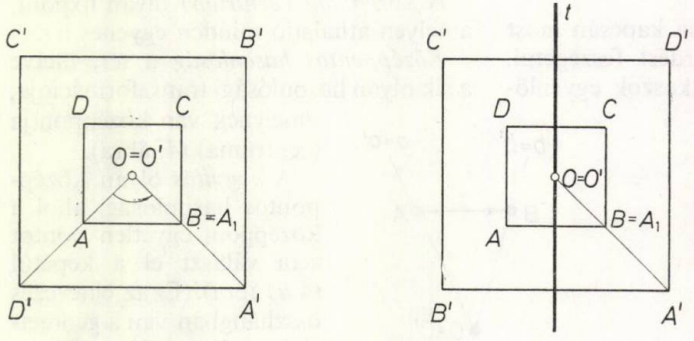


6. ábra



7. ábra

A fentebb tárgyaltak mintájára belátható, hogy feladatunknak nyolc megoldása van. Ezek közül négy transzformáció *forgatás-nagyítás*, négy pedig *tükrözés-nagyítás*. E transzformációkra a 8. ábra mutat egy-egy példát.



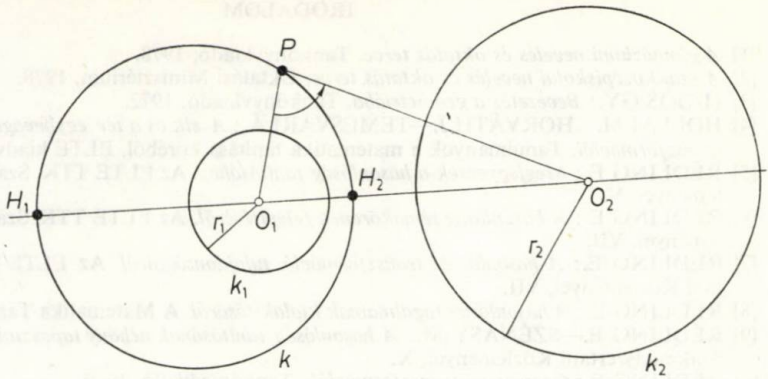
8. ábra

4. Tekintsünk két koncentrikus kört! Keressünk olyan hasonlósági transzformációkat, amelyek az egyik körnek a másikat feleltetik meg!

A két kör forgatás-nagyítással és tükrözés-nagyítással is *végtelen sokféleképpen* rendelhető egymáshoz.

Analóg térbeli feladathoz jutunk, ha két koncentrikus gömbhöz keresünk olyan hasonlósági leképezéseket, amelyek az egyik alakzatnak a másikat feleltetik meg.

A következő feladatokat szakkörre ajánljuk.



9. ábra

5. Rajzoljuk meg az O_1 középpontú és r_1 sugarú k_1, illetőleg az $O_2 \neq O_1$ középpontú és r_2 sugarú k_2 kört (9. ábra)! A két kör sugara legyen különböző! (Az ábrán a H_1 és a H_2 a körök hasonlósági pontjai.) Belátható, hogy *végtelen sok olyan hasonlósági transzformáció van, amely a k_1 kört a k_2-höz rendeli.*

A megoldásban a következő tételre hivatkozunk:

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak aránya egy, az 1-től különböző adott pozitív szám, egy kör (Apollóniosz-féle kör). (Lásd: [3], 124. oldal!)

Tekintsük az O_1, O_2 pontokhoz tartozó és $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ aránnyal meghatározott *Apollóniosz*-féle kört! (Ezt a 9. ábrán k-val jelöltük.) Legyen a P a k kör pontja! A P körüli O_1PO_2 irányított szögű és $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$ arányú *forgatás-nagyítás* az O_1 ponthoz az O_2 pontot rendeli, ezért a k_1 körnek a k_2 kört felelteti meg. A P pont azonban a k kör tetszőleges pontja lehet, ezért a két kör végtelen sokféle módon feleltethető meg egymásnak.

Azt is meg lehet mutatni, hogy *végtelen sok olyan tükrözés-nagyítás van,* amelyik a k_1 körnek a k_2 kört felelteti meg.

6. Forgassuk meg a 9. ábrán látható konstrukciót az O_1O_2 egyenes körül! Így rendre a k_1, k_2 s a k körből származtatott $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ és $\mathbf{G}$ gömböket kapjuk. (A $\mathbf{G}$ az O_1, O_2 pontokhoz s az 1-től különböző $\lambda > 0$ számhoz tartozó *Apollóniosz*-féle gömb.)

Jelöljük P-vel a $\mathbf{G}$ tetszőleges pontját, s t-vel a P ponton áthaladó és az O_1PO_2 háromszög síkjára merőleges egyenest! Tekintsük a térnek azt a hasonlósági leképezését, amely a t tengely körüli O_1PO_2 irányított szögű elforgatás, s a P centrumú, az 1-től különböző $\lambda > 0$ arányú nagyítás szorzata! Ez a $\mathbf{G}_1$ gömbnek a $\mathbf{G}_2$ gömböt felelteti meg. A P pont azonban a $\mathbf{G}$ *tetszőleges* pontja, ezért végtelen sok olyan hasonlósági transzformáció van, amely a $\mathbf{G}_1$-hez a $\mathbf{G}_2$-t rendeli. (Külön kell megvizsgálni azt a speciális esetet, amikor a P pont a H_1 vagy a H_2 ponttal esik egybe.)

* * *

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a mondott transzformációk esetén nem csupán a szerepeltetett alakzatok pontjait, hanem a pontsík, illetőleg a ponttér egészét képezzük le. A szerepeltetett alakzatok a sík, illetve a tér részhalmazai.

Kiemeljük még, hogy az alakzatok hasonlósága (egybevágósága) *szimmetrikus* reláció, ezért is beszélhetünk egymáshoz hasonló (illetve egymással egybevágó) alakzatokról. Ez a reláció egyben *ekvivalencia-reláció*, ennek megfelelően az alakzatok osztályokba sorolhatók: azonos osztályba kerülnek az egymáshoz hasonló (egymással egybevágó) alakzatok.

IRODALOM

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó, 1978.
[2] *A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve.* Oktatási Minisztérium, 1978.
[3] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, 1972.
[4] HOLLAI M.—HORVÁTH J.—TEMESVÁRI Á.: *A sík és a tér egybevágósági és hasonlósági transzformációi.* Tanulmányok a matematika tanítása köréből, ELTE kiadvány, 1978.
[5] RÉDLING E.: *Megjegyzések a hasonlóság tanításához.* Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, V.
[6] RÉDLING E.: *A hasonlóság témakörének felépítéséről.* Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, VII.
[7] RÉDLING E.: *A hasonlósági transzformáció tulajdonságairól.* Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, VII.
[8] RÉDLING E.: *A hasonlóság fogalmainak kialakításáról.* A Matematika Tanítása, 1977/2.
[9] RÉDLING E.—SZÉNÁSY M.: *A hasonlóság tanításának néhány tapasztalata.* Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, X.
[10] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk.* Tankönyvkiadó, 1980.

DR. HORVÁTH JENŐ
tanszékvezető egyetemi docens
ELTE, Budapest

Kárteszi Ferenc professzornak
75. születésnapjára

Szabályos sokszögek néhány extremális tulajdonsága euklideszi és hiperbolikus síkon, valamint gömbfelületen

A [3] dolgozat **2.2.** pontjában említettük, hogy a középiskolás tananyagban vagy a szakkörön foglalkozunk olyan tételekkel, feladatokkal, amelyek mindhárom geometriában (euklideszi, szferikus és hiperbolikus) érvényesek, de az iskolában használt bizonyításuk euklideszi. [3]-ban három feladatot említettünk.

Dolgozatunkban közülük kettőre adunk — mindhárom geometriában érvényes, középiskolai szinten is érthető — bizonyítást, a harmadik esetén csak utalunk a bizonyítási módszerekre. (A [3]-ban említett feladatokat itt tételként fogalmazzuk meg.)

1. tétel: *Azon konvex n-szögek közül, amelyek csúcsai egy adott kör nem külső pontjai, az adott körbe írt szabályos n-szög kerülete és területe maximális.*

2. tétel: *Azon konvex n-szögek közül, amelyek egy adott kört tartalmaznak, az adott kört érintő szabályos n-szög kerülete és területe minimális.*

3. tétel: *A háromszög oldalfelező transzverzálisai (súlyvonalai) egy ponton mennek át.*

Ez utóbbi bizonyítása szferikus esetben [6]-ban található (lásd **1918.** feladat!). Hiperbolikus esetben konkrét modellen a bizonyítás megtalálható [8]-ban (158. oldal) és [5]-ben (92. oldal). A párhuzamossági axiómától függetlenül, térgeometriát is felhasználva, elemi geometriai módszerekkel *F. Gruber* [1] bizonyította be a **3. tételt.**

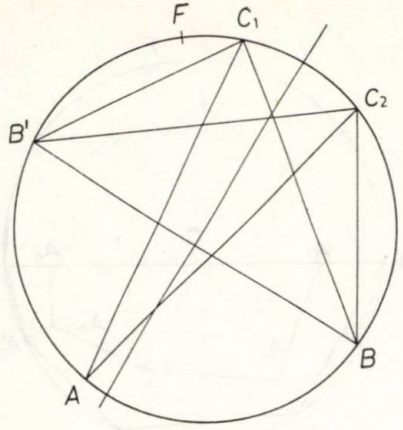
Az **1.** és **2. tételek** *bizonyítása előtt néhány, önmagában is érdekes segédtételt bizonyítunk be.*

1. segédtétel: Legyen A és B egy adott k kör kerületének két rögzített pontja, F az általuk meghatározott egyik ív felezőpontja, C pedig az F-et tartalmazó ív B-hez közelebbi részének tetszőleges pontja ($AC \cong BC$)!

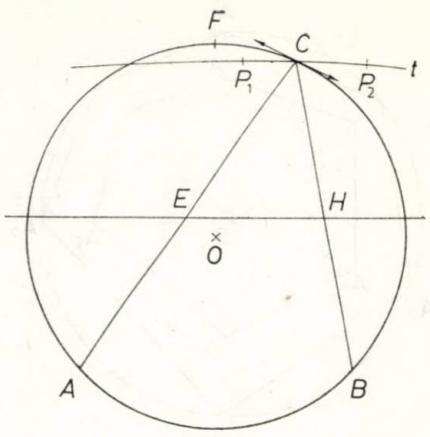
Állítás:

1.1. Az $AC+BC$ összeg,

1.2. az ABC háromszög területe az FC ív szigorúan monoton csökkenő függvénye.



1. ábra



2. ábra

1.1. *bizonyítása:* Legyen C_1 és C_2 a feltételeket kielégítő pont és $FC_1 < FC_2$ (1. ábra). Bebizonyítjuk, hogy

(1) $$AC_1 + BC_1 > AC_2 + BC_2,$$

amiből következik **1.1.**

Tükrözzük a B pontot a C_1C_2 szakasz felezőmerőlegesére, tükörképe legyen B'. Tükrözés miatt

(2) $$BC_2 = B'C_1,$$
$$BC_1 = B'C_2.$$

A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával könnyen igazolható, hogy konvex négyszögben az átlók összege nagyobb két szemközti oldal összegénél. Ezt alkalmazva az AC_2C_1B' négyszögre adódik az

(3) $$AC_1 + B'C_2 > AC_2 + B'C_1$$

egyenlőtlenség. (3)-ba (2)-t helyettesítve kapjuk (1)-et.

1.2. *bizonyítása:* Euklideszi esetben az **1.2.** *állítás* triviális.

Legyen E és H az AC, illetve a BC oldal felezőpontja, O a kör középpontja (2. ábra)! [4]-ben bizonyítottuk, hogy azon P pontok összessége, amelyekre ABP háromszög területe egyenlő az ABC háromszög területével, és a C ponttal — AB-hez viszonyítva — azonos féltérben vannak, az EH egyenes C ponton átmenő távolságvonala (t). Az $AB \perp OF$-ből következik, hogy $EH \perp OF$, továbbá [4] alapján, a 2. ábra jelöléseit használva, fennállnak az

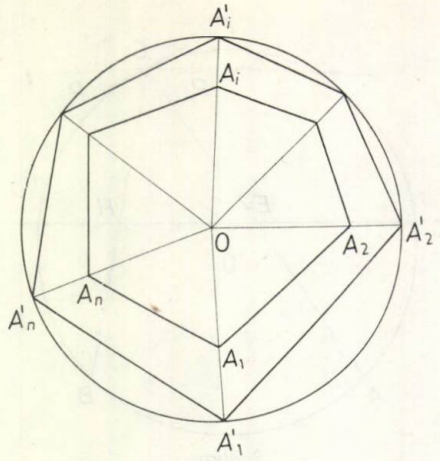
$$OP_1 < OC < OP_2$$

egyenlőtlenségek, ezért a C és F pontok által határolt, B pontot nem tartalmazó ívet a t távolságvonal elválasztja EH-tól. Így C ponttal F pont felé mozogva az ABC háromszög területe szigorúan monoton növekszik [4].

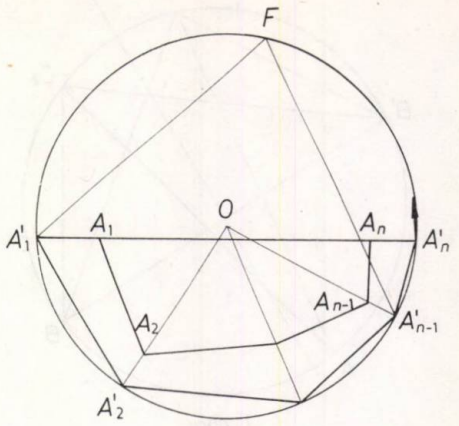
Ezzel az **1. segédtételt** bebizonyítottuk.

Az **1. tétel** *bizonyítása:* Ha a sokszög csúcsai nincsenek a kör kerületén, akkor attól függően, hogy a kör középpontja (O) belső pontja vagy nem belső pontja a sokszögnek, a sokszög csúcsait a 3.*a*), illetve 3.*b*) ábrán látható módon kivetítjük a kör kerületére. Az $A_1'A_2' \dots A_n'$ sokszög területe és kerülete nagyobb az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög területénél, illetve kerületénél. (Az utóbbi azért igaz, mert a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség alapján bizonyítható, hogy konvex sokszög kerülete kisebb az őt tartalmazó sokszög kerületénél.)

Ha O az $A_1'A_2' \dots A_n'$ sokszögnek nem belső pontja (3.*b)* ábra), akkor az **1.** *segédtétel* alapján az $A_1'A_2' \dots A_{n-1}'F$ sokszög területe és kerülete nagyobb az $A_1'A_2' \dots A_{n-1}'A_n'$



a)



b)

3. ábra

sokszög területénél, illetve kerületénél, ahol F az A_1' és A_{n-1}' pontok által határolt, A_n'-t tartalmazó ívnek felezőpontja.

Tegyük fel, hogy a sokszög csúcsai a kör kerületén vannak és O a sokszög belső pontja! Kössük össze az O pontot a sokszög csúcsaival! Az így kapott n db egyenlő szárú háromszöget a középpont körül tetszőlegesen átrendezhetjük, a sokszög kerülete és területe nem változik. Rendezzük át úgy, hogy teljesüljenek az

$$(4) \qquad A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong$$

$$\cong A_{n-1}A_n \cong A_nA_1$$

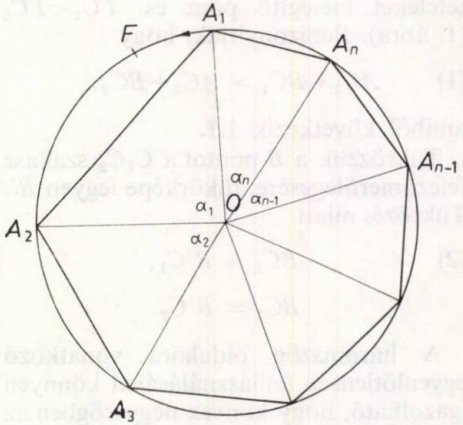
egyenlőtlenségek (4. ábra)! Legyen $A_1OA_2\sphericalangle = \alpha_1$ és $A_nOA_1\sphericalangle = \alpha_n$. (4)-ből következik, hogy

$$(5) \qquad \alpha_1 \cong \frac{2\pi}{n} \cong \alpha_n,$$

ahol egyenlőség csak a szabályos n-szög esetén állhat fenn. Legyen

$$(6) \qquad \alpha_1 > \frac{2\pi}{n} > \alpha_n,$$

továbbá F az A_2A_n ív A_1-et tartalmazó részének felezőpontja! Mozgassuk az A_1 pontot F pont felé! Az **1. segédtétel** alapján az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög kerülete és területe szigorúan monoton növekszik. A mozgást $\alpha_1+\alpha_n \cong \frac{4\pi}{n}$ esetén az $\alpha_1 = \frac{2\pi}{n}$-ig, $\alpha_1+\alpha_n > \frac{4\pi}{n}$ esetén pedig az $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$-ig végezzük.



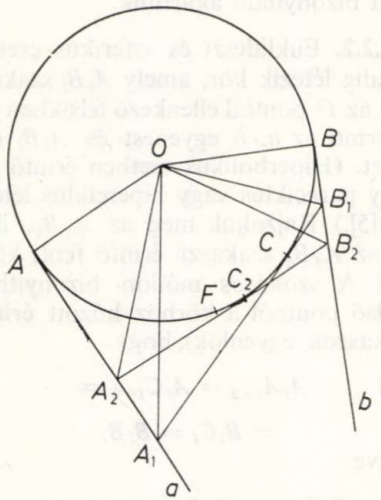
4. ábra

Ha az így kapott n-szög nem szabályos, akkor az oldalak nagyság szerinti átrendezése után a bizonyítást megismételjük. Így legfeljebb $(n-1)$ lépésben a szabályos n-szöget kapjuk, közben az n-szög kerülete és területe is növekedett.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyításában alkalmazott módszer *Kürschák Józseftől* származik [7].

2. segédtétel: Adott O középpontú k kör két pontjában (A-ban és B-ben) húzzunk érintőt a körhöz (a, illetve b)! Legyen F az A és B pontok által határolt egyik ív felezőpontja, C pedig annak tetszőleges, B-hez közelebbi pontja, amelyben húzott érintő metszi az a és b érintőket az A_1, illetve B_1 pontokban (5. ábra).



5. ábra

Állítás: Az AA_1B_1BO ötszög

2.1. területe,

2.2. kerülete

az FC ív szigorúan monoton növekvő függvénye.

2.1. *bizonyítása:* Szimmetriai megfontolásokból következik, hogy az AA_1B_1BO ötszög területe kétszerese az A_1B_1O háromszög területének, továbbá $A_1OB_1\sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot AOB\sphericalangle$, azaz független a C ponttól. Legyen C_2 a fenti körív pontja, amelyre fennállnak az $AC_2 \cong BC_2$ és $FC_2 < FC$ egyenlőtlenségek! A C_2-ben húzott érintő az a és b érintőket az A_2, illetve B_2 pontokban metszi. Megmutatjuk, hogy

(7) $A_2B_2O\triangle$ ter. $< A_1B_1O\triangle$ ter.

Forgassuk O pont körül az A_2B_2O háromszöget úgy, hogy C_2 pont a C pontba kerüljön! Ezt a 6. ábrán külön lerajzoltuk. A C és a C_2 pontra adott feltételek miatt

(8) $A_1O > A_2O \cong B_2O > B_1O$,

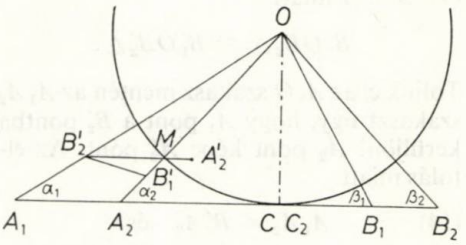
továbbá $B_2OA_2\sphericalangle = B_1OA_1\sphericalangle$ miatt

(9) $A_2OA_1\sphericalangle = B_2OB_1\sphericalangle$.

(8)-ból és (9)-ből következik, hogy

$B_2OB_1\triangle$ ter. $< A_2OA_1\triangle$ ter.,

amelyből pedig (7) következik.



6. ábra

2.2. *bizonyítása:* Az 5. ábra jelöléseit használva megmutatjuk, hogy

(10) $AA_1 + A_1B_1 + B_1B > AA_2 + A_2B_2 + B_2B.$

Szimmetriai megfontolások alapján elég megmutatni, hogy

(11) $A_1B_1 > A_2B_2$,

ugyanis $AA_1 + B_1B = A_1B_1$, illetve $AA_2 + B_2B = A_2B_2$.

Külön adunk egy egyszerű bizonyítást az euklideszi és hiperbolikus esetre **(2.2.1.)**, az euklideszi és szferikus esetre **(2.2.2.)** és végül csak az euklideszi esetre **(2.2.3.)**. Megjegyezzük, hogy a **2.2.1.**-ben alkalmazott bizonyítás néhány diszkussziós lépéssel szferikus esetben is járható. A **2.2.2.** módszere alkalmazható hiperbo-

likus esetben is, ha ismerjük a paraciklus és hiperciklus tulajdonságait.

2.2.1. A C és a C_2 pontra adott feltételek miatt az A_2OB_2 háromszög és az A_1OB_1 háromszög elhelyezhető a 6. ábra szerint. Legyenek a csúcsoknak megfelelő szögek $\alpha_2, \beta_2, \alpha_1, \beta_1$. Euklideszi és hiperbolikus geometriában a háromszög külső szöge nagyobb a nem mellette levő belső szögnél, továbbá (8) miatt

$$(12) \qquad \alpha_1 < \alpha_2 \leqq \beta_2 < \beta_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Mérjük fel az OA_2 és az OA_1 szakaszra az OB_1, illetve az OB_2 szakaszt!

$$(13) \qquad OB_1 = OB_1', \quad OB_2 = OB_2'.$$

(9) és (13) miatt

$$B_1OB_2\triangle \cong B_1'OB_2'\triangle.$$

Toljuk el az A_1O szakasz mentén az A_1A_2 szakaszt úgy, hogy A_1 pont a B_2' pontba kerüljön! A_2 pont képe A_2' pont. Az eltolás miatt

$$(14) \qquad A_1A_2 = B_2'A_2' \quad \text{és}$$

$$A_2'B_2'O\sphericalangle = \alpha_1.$$

(12)-ből következik, hogy $B_2'A_2'$ a $B_1'B_2'O$ szögtartományban van. Mivel A_2 és A_2' az A_1O egyenes távolságvonalán van, ezért OA_2 szakasz metszi a $B_2'A_2'$ szakaszt. Legyen a metszéspont M. Így

$$(15) \qquad B_2'M < A_2'B_2' = A_1A_2,$$

másrészt (12) miatt

$$MB_1'B_2'\sphericalangle = \pi - \beta_1 > \frac{\pi}{2},$$

ezért az $MB_1'B_2'$ háromszögből

$$(16) \qquad MB_2' > B_1'B_2' = B_1B_2.$$

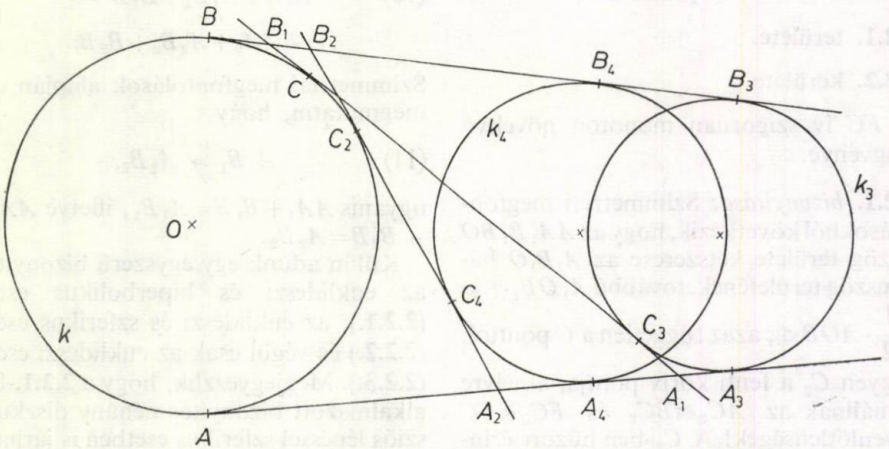
(15)-öt és (16)-ot összevetve adódik (11), amit bizonyítani akartunk.

2.2.2. Euklideszi és szferikus esetben mindig létezik kör, amely A_iB_i szakaszhoz az O ponttal ellenkező félsíkban van és érinti az a, b egyenest és A_iB_i szakaszt. (Hiperbolikus esetben érintő kör vagy paraciklus vagy hiperciklus létezik [8], [5].) Rajzoljuk meg az A_1B_1, illetve az A_2B_2 szakaszt érintő fenti köröket! A szokásos módon bizonyítható (külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők), hogy

$$(17) \qquad A_iA_{i+2} = A_iC_{i+2} = B_iC_i = B_iB,$$

illetve

$$(18) \qquad B_iB_{i+2} = B_iC_{i+2} = A_iC_i = A_iA$$



7. ábra

és

(19) $AA_{i+2} = A_iB_i = BB_{i+2}$,

ahol $i=1, 2$ és $C_1=C$ (7. ábra).

(20) $AA_3 = BB_3 > BB_4 = AA_4$,

mert ellenkező esetben a C és a C_2 pontra adott feltételek miatt a k_3 és k_4 köröknek 4 metszéspontja lenne, ami nyilván lehetetlen. (19)-ből és (20)-ból következik (11), amit bizonyítani akartunk.

2.2.3. Euklideszi esetben

$$A_iB_iO\triangle \text{ ter.} = \frac{r}{2}\cdot A_iB_i,$$

ahol $i=1, 2$. **2.1.** miatt

$$A_1B_1O\triangle \text{ ter.} > A_2B_2O\triangle \text{ ter.},$$

ezért

$$A_1B_1 > A_2B_2,$$

amit bizonyítani akartunk.

A **2. tétel** *bizonyítása:* Tekintsünk egy $A_1A_2 \dots A_n$ konvex sokszöget, amely tartalmaz egy r sugarú kört! (Gömb esetén feltesszük, hogy a sokszög egy félgömbön van.) Ha a sokszög nem mindegyik oldala érinti a kört, akkor a 8. ábrán látható levágásokkal a kört érintő sokszöget kapunk. A tartalmazás miatt a sokszög kerülete és területe csökkent. Ha a sokszög oldalszáma csökkent, akkor további érintő behúzásával elérhető az eredeti oldalszám, miközben a kerület és terület csökkent. Az így kapott érintő n-szög csúcsait A_1-, A_2-, ..., A_n-nel, az érintési pontokat B_1-, B_2-, ..., B_n-nel jelöljük. ($B_1 \in A_1A_n$, $B_i \in A_{i-1}A_i$, ahol $i=2, 3, \dots, n$.) Legyen

$$B_iOB_{i+1}\sphericalangle = \alpha_i,$$

ahol

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad B_{n+1} = B_1.$$

A $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$ miatt a $B_iA_iB_{i+1}O$ négyszögeket tetszőlegesen átrendezhetjük O pont körül, továbbra is n-szöget kapunk, miközben a terület és kerület nem változott. Rendezzük át úgy, hogy

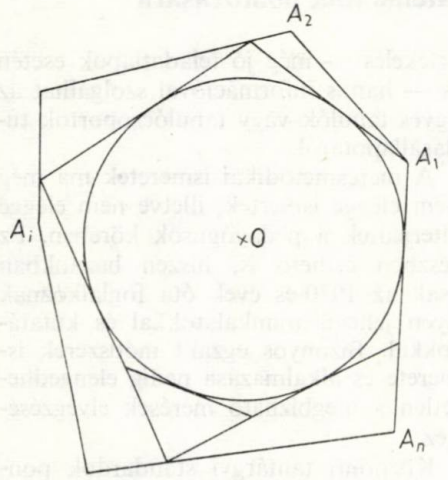
(21) $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_n$

teljesüljön! (A 9. ábrán már nagyság szerint rendeztük a szögeket.) Nyilván

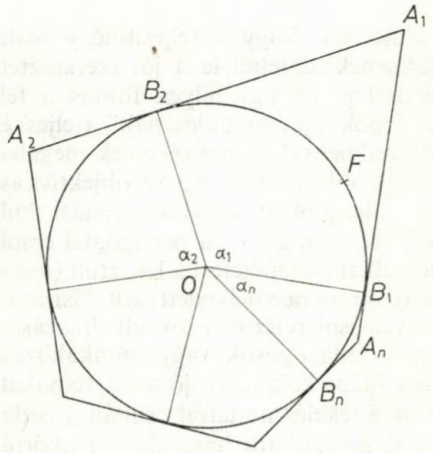
$$\alpha_1 \geqq \frac{2\pi}{n} \geqq \alpha_n,$$

és egyenlőség csak a szabályos n-szög esetén van. Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 > \frac{2\pi}{n} > \alpha_n.$$



8. ábra



9. ábra

Legyen F a kör B_nB_2 által határolt, B_1 pontot tartalmazó ívének felezőpontja! Forgassuk B_1 pontot az érintővel együtt F pont felé! A **2. segédtétel** alapján az így kapott n-szög kerülete és területe is csökken.

Ha $\alpha_1+\alpha_n \geqq \frac{4\pi}{n}$, akkor a forgatást $\alpha_n=\frac{2\pi}{n}$-ig végezzük, ha $\alpha_1+\alpha_n<\frac{4\pi}{n}$, akkor $\alpha_1=\frac{2\pi}{n}$-ig; ezzel a sokszög kerülete és területe csökkent.

Ha az így kapott n-szög nem szabályos, akkor a fenti négyszögeket ismét (21)-nek megfelelően átrendezzük, és megismételjük az előbbi forgatást, ezért legalább két középponti szög $\frac{2\pi}{n}$ nagyságú lesz. Ily módon legfeljebb $(n-1)$ lépésben eljuthatunk a szabályos n-szöghöz, közben a sokszög kerülete és területe csökkent.

Ezzel a **2. tételt** is bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] GRUBER, F.: *Neuer Beweis des Transversalensatzes in der absoluten Geometrie,* Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss. Math. naturw. Klasse, 1929, Abh. 18.

[2] FEJES TÓTH L.: *Reguläre Figuren.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[3] HORVÁTH J.: *A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában.* A Matematika Tanítása XXVII. 6. (1980), 161—168. oldal.

[4] HORVÁTH J.: *A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában II.* A Matematika Tanítása XXVIII. 2. (1981), 52—58. oldal.

[5] HORVÁTH J.: *Sztereografikus projekció és alkalmazásai.* (Elemi geometria a Poincare-féle félgömb modellen.) ELTE TTK kiadvány, Budapest, 1980.

[6] HORVAI K.—REIMAN I.: *Geometriai feladatok gyűjteménye.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[7] KÜRSCHÁK J.: *Über dem Kreis ein- und umgeschriebene Vielecke.* Math. Ann. 30 (1887), 578—581. oldal.

[8] SZÁSZ P.: *Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

KUN PÉTER
gimnáziumi igazgatóhelyettes
Szentendre

Egy lehetőség a matematikafeladatok pontozására

Ismeretes, hogy a teljesítmény reális mérésének előfeltétele a jól szerkesztett feladatlap, de ugyanilyen fontos a feladatlapok „javító kulcsának" (teljes és részeredmények pontértékeinek megállapítása) objektivitása is. Az objektivitáshoz mindjobban közelítő javítási kulcsok kidolgozása — a pedagógiai empíria mellett — feltételezi a letisztult (tudományos rangra emelkedett) kutatási eredmények ismeretét és azok alkalmazását. Egyes pedagógusok vagy munkaközösségek hiába készítenek jó feladatlapokat, ha az értékelés mutatóit csupán a pedagógiai gyakorlatra hagyatkozva „körülbelül" állapítják meg. Az ily módon való értékelés — még jó feladatlapok esetén is — hamis információval szolgálhat az egyes tanulók vagy tanulócsoportok tudásállapotáról.

A mérésmetodikai ismeretek ma még nem eléggé ismertek, illetve nem eléggé elterjedtek a pedagógusok körében. Ez részben érthető is, hiszen hazánkban csak az 1970-es évek óta foglalkoznak ilyen jellegű munkálatokkal és kutatásokkal. Bizonyos egzakt módszerek ismerete és alkalmazása pedig elengedhetetlen a megbízható mérések elvégzéséhez.

Központi tantárgyi standardok pontozási útmutatói — többé-kevésbé — bi-

zonyos mérésmetodikai alapelvek betartásával készülnek, ezek száma azonban olyan csekély, hogy nem fölösleges dolog ráirányítani a pedagógusok figyelmét a reális értékelés módszereire.

A következőkben ismertetünk egy lehetséges módszert matematikafeladatok pontozási útmutatóinak összeállításához.

Ez a módszer erősen támaszkodik *I. B. Morgunov* szovjet, *Sawiczky* lengyel és *E. Rogers* angol kutatók által kidolgozott — tanterv- tervezésre alkalmazott — mátrix-gráf módszerre, amelynek részletes ismertetése megtalálható az Audio-Vizuális Technikai és Módszertani Közlemények című folyóirat 1970. évi 1. számában.

Tekintsük tehát a következő feladatot:

Írjuk fel az $xy=2$ egyenletű hiperbola $x=2$ abszcisszájú pontjához húzható érintő egyenletét, azután számítsuk ki az érintő és a koordinátatengelyek által bezárt háromszög területét! (A feladat az elmúlt évek egyik érettségi feladata volt.)

Jelöljük a feladat megoldásában alkalmazásra kerülő fogalmakat, definíciókat, eljárásokat, tételeket számokkal, figyelmen kívül hagyva a megoldásban alkalmazott sorrendjüket!

1. Adott abszcissza esetén, az adott hiperbolán levő érintési pont meghatározható.
2. Az $xy=2$ egyenlet explicit alakba írható.
3. Az explicit alakba írt $y=\frac{2}{x}$ függvényt deriválni kell.
4. Deriválható függvény adott pontban vett differenciálhányadosa megegyezik a függvénygörbéhez e pontban húzható érintő iránytangensével.
5. Az egyenes iránytangense megegyezik az irányvektor ordinátájának és abszcisszájának hányadosával.
6. Ha ismert az érintőegyenes egy pontja és irányvektorának koordinátái, akkor egyenlete felírható.
7. Az x tengely egyenlete: $y=0$.
8. Az ordinátatengely egyenlete: $x=0$.
9. Az érintő és az abszcisszatengely metszéspontját egyenletrendszer megoldásával meghatározhatjuk.
10. Az érintő és az ordinátatengely metszéspontját egyenletrendszer megoldásával meghatározhatjuk.
11. A keletkezett háromszög derékszögű.
12. A derékszögű háromszög területének meghatározásához rendelkezésünkre áll egy oldal és a hozzá tartozó magasság.
13. A háromszög területét az ismert területképlettel meghatározzuk.

A megoldásban alkalmazott legfontosabb tételek, eljárások, definíciók közti logikai relációkat egy kvadratikus mátrixba építjük be oly módon, hogy ha a két vizsgált összefüggés között van kapcsolat, akkor 1-et, különben pedig 0-át írunk. A fődiagonálisba „x"-eket írunk, mivel egy fogalomnak, tételnek, eljárásnak önmagával való logikai kapcsolata semmi információt nem ad a megoldáshoz.

Így a következő mátrixhoz jutunk:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	x	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	I
2	0	x	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	II
3	0	1	x	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	VI
4	0	1	1	x	1	1	0	0	1	1	0	0	0	VI
5	0	0	0	1	x	1	0	0	1	1	0	0	0	IV
6	1	1	1	1	1	x	0	0	1	1	0	0	0	VII
7	0	0	0	0	0	0	x	0	1	1	0	0	0	II
8	0	0	0	0	0	0	0	x	1	1	0	0	0	II
9	0	0	0	0	0	1	1	0	x	0	0	0	0	II
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	x	0	0	0	II
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	1	1	II
12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	x	1	IV
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	x	IV

A mátrix sorai mellett, jobb oldalon, a római számírással írt számok azt jelzik, hogy a sorszámmal megjelölt fogalom, tétel vagy eljárás hány esetben áll kap-

csolatban más alkalmazott fogalmakkal, tételekkel, eljárásokkal. Így például láthatjuk, hogy az 1. sorszámú tétel ismerete és alkalmazása feltétele a 6. sorszámú operáció végrehajtásának, és az 1. sorszámú tételt mindössze egyszer hozzuk logikai kapcsolatba más fogalmakkal a feladat megoldása során.

Célunk most az, hogy számba vegyük az érintett fogalmak, definíciók, eljárások alkalmazásának gyakoriságát, illetve más fogalmakkal alkotott logikai kapcsolatának számosságát. Össze kell számlálnunk a mátrix soraiban található 1-eseket, s ez a szám mutatja meg, hogy a megoldás mennyire támaszkodik az eljárás, a fogalom vagy a tétel ismeretére, illetve alkalmazására (a mátrix jobb oldalán római számírással jelölve).

A 3. pontban jelölt eljárás hat esetben áll kapcsolatban más fogalmakkal, eljárásokkal, a 6. számú eljárás végrehajtásához pedig hét esetben kell kapcsolatot létesíteni más fogalmakkal. Amint a mátrixból kitűnik, az érintő egyenletének a 6. pontban jelölt felírásához van szükség a legtöbb kapcsolatteremtésre, ezért nyilvánvaló, hogy ennek a lépésnek a végrehajtását nagyobb mértékben kell elismerni, mint részmegoldást, az érintési pontnak az 1. pontban megfogalmazott meghatározásához képest.

A részeredmények értékelésénél, valamint a feladatmegoldásra járó teljes pontérték megállapításánál figyelembe kell vennünk az alkalmazott tételek, fogalmak, eljárások gyakoriságát és nehézségi fokát egyaránt. Nyilvánvaló, hogy a derékszögű háromszög területének meghatározása (13. pont) lényegesen könnyebb operáció, mint az $y=\frac{a}{x}$ alakban adott függvény deriválása (3. sorszám).

Az is világos, hogy nem pontozhatjuk egyenlő mértékben például az 5. és a 11. pontban megfogalmazott ismeretet, mivelhogy az előbbi lényegesen nehezebb és ritkábban előforduló ismeret a középiskolában.

Ezek után két lehetőség kínálkozik a részpontszámok és a teljes pontérték meghatározására.

Először: Vegyünk figyelembe minden fogalmat, tételt, eljárást — bármilyen egyszerű, és készségszinten megkívánt ismeret legyen is —, majd határozzuk meg a legegyszerűbb, legkevesebbet alkalmazott eljárás „egység-pontszámát", s ehhez viszonyítva a többi eljárás, fogalom, tétel alkalmazásáért járó pontszámot is! A részpontok összege adja a teljes pontszámot.

Másodszor: Hagyjuk figyelmen kívül azokat a fogalmakat, tételeket, eljárásokat, amelyek igen egyszerűek, illetve amelyeknek készségszinten kell lenniük, s ezeket a pontozáskor ne vegyük figyelembe, azaz ne értékeljük mint részmegoldásokat! Konvenció kérdése, hogy a feladat pontértékét milyen szempont szerint állapítjuk meg. Mi most a második elv szerint határozzuk meg a feladatra adható pontszámot.

Először megállapítjuk a megoldás szempontjából kiemelt fogalmakat, tételeket, eljárásokat, és figyelembe vesszük ezek logikai kapcsolatának gyakoriságát más tételekkel, fogalmakkal, eljárásokkal. Megállapítjuk annak a részfeladatnak a pontértékét, amely a legtöbb kapcsolat meglátását igényli a megoldótól és a teljes megoldás gerincét képezi. A mi esetünkben ez a 6. sorszámot viselő eljárás. Ehhez az „alappontszámhoz" viszonyítva adjuk meg a többi részmegoldás pontértékeit. Nem volna célszerű a 6. sorszám alatti teljesítményért 7 pontot venni alapul (a megoldás során hét esetben kell logikai kapcsolatot létesíteni más fogalmakkal), mert így a teljes megoldásért járó pontszám túl magas lenne, s így áttekinthetetlen. A hét logikai kapcsolat közül a legfontosabbakat (3—4—5) véve figyelembe, határozzuk meg e részfeladat pontszámát *három* pontban.

Ezután sorra vesszük az egyes sorszámok alatti tételek, eljárások nehézségi fokát és kapcsolatának gyakoriságát, majd megállapítjuk ezek pontértékét, az alappontszámhoz (3 pont) viszonyítva.

Nézzük tehát a részpontok meghatározását!

Az 1. sorszám alatti észrevételért:	0,5 pont
a 2. sorszám alatti rendezésért:	0,5 pont
a 3. sorszám alatti deriválásért:	1 pont
a 4. pontban megfogalmazott észrevételért:	0,5 pont
az 5. pontbeli ismeretért:	0,5 pont
a 6. pontbeli egyenes egyenletének felírásáért:	3 pont
a 7. és 8. pontbeli ismeretért összesen:	1 pont
a 9. és 10. egyenletrendszer megoldásáért összesen:	1 pont
a 11. és 12. felismerésért nem adunk pontot,	
a 13. pontban a terület meghatározásáért:	1 pont.

Összes pontszám: 9.

Ez a pontérték lényeges eltérést mutat a központi útmutatóban előírt pontértékhez képest, amely *6 pont volt*. Ez az eltérés abból adódik, hogy a központi útmutató a 4—5—6 sorszám alattiak végrehajtásáért helyesen négy pontot adott ugyan, de az összes többi részeredményt már csak két pontra értékelte. Nem értékelte a 3—4—5 alatti részeredményeket, pedig — amint a mátrixból kitűnik — jogos ezeknek a részeredményeknek az értékelése.

Jogos, annál is inkább, mert sok megoldó eljuthat a 3—4—5 alatti felismerésig vagy megoldásig, de nem tudja elvégezni a 6.-ban megfogalmazott operációt. Arról is meggyőződhetünk, hogy a feladat második részének a megoldásáért (7—13 pont) járó három pont arányban áll az itt nyújtott teljesítménnyel, szemben az első résszel, amelyet hat ponttal értékeltünk.

Matematikafeladatok megoldásakor nem szabad figyelmen kívül hagynunk a megoldáshoz vezető részeredmények értékelését, mert így ferde képet alkotunk magunknak a tanulók vagy tanulócsoportok felkészültségéről. Sok tanuló jól képzeli el a feladat megoldását, még meg is tervezi a megoldáshoz vezető utat, de bizonyos hiányosságok miatt (számolási készség gyengesége, matematikai ismeretek hiánya, felületes szemlélet stb.) nem képes teljes megoldást produkálni. Ezeknek a tanulóknak a tudása nem elégtelen, hanem csak hiányos, tehát értékelnünk kell.

Az itt bemutatott módszer természetesen nemcsak matematikai feladatok pontozásához használható, hanem bármely tantárgy tesztlapjainak pontértékeit is megbízhatóan állapíthatjuk meg segítségével. A pedagógusnak nemcsak egy feladatmegoldás értékelésére kell gondot fordítania, hanem értékelnie kell az egyén fejlődését bizonyos tananyagegységek anyagából is. Ezért témazáró dolgozatok után célszerű elkészíteni az osztály (csoport) *feladatmátrixát* is. Ez tartalmazza a tanulók nevét (oszlop) és a feladatok sorszámát (sor). A sor és oszlop találkozásához 1-et írunk, ha a tanuló jól oldotta meg az illető feladatot, és 0-t, ha nem oldotta meg, vagy nem ért el értékelhető eredményt. Az így elkészített mátrix jól mutatja az egyes tanulók hiányosságait ugyanúgy, mint az egész csoport hiányosságait.

A feladatmátrix elemzése megkönnyíti a felzárkóztató munka megtervezését, megmutatja az egész csoportra jellemző eredményeket és hiányosságokat.

Tanulóink és saját munkánk reális értékelése megéri azt a kevés fáradságot, amellyel e módszer alkalmazása jár, ezen túlmenően pedig segít az eredmények és a hiányosságok felismerésében.

HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Magyar tanulók részvétele a 33. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán

I. Bevezetés

Ebben az esztendőben negyedszer vettek részt magyar tanulók az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán. Azoknak az olvasóinknak számára, akik nem ismerik ezt a versenyt, a következőkben megkíséreljük röviden bemutatni azt.

Az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga tulajdonképpen az Amerikai Egyesült Államok középiskolai matematikai tanulmányi versenyének (vagy, ha úgy tetszik: nemzeti matematikai olimpiájának) első fordulója.

Tekintettel arra, hogy ezen a versenyen érthető módon igen sokan vesznek részt (1981-ben több, mint 400 ezren), ezért a verseny szervezőinek olyan versenyformát kellett kidolgozniuk, hogy egyrészt maga a verseny is gyorsan lebonyolítható legyen, másrészt a versenydolgozatok értékelését is hamar el lehessen végezni, és ennek alapján megfelelő számú versenyzőt lehessen kiválasztani, hogy azokat behívják a verseny második fordulójára, amelyet az Egyesült Államok Matematikai Olimpiájának neveznek.

Az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán részt vevő tanulók 30 feladatot kapnak: ezek mind az elemi matematika témaköreiből választottak, közülük kb. 10 könnyű, 10 közepes nehézségű és ugyancsak 10 nehezebbnek minősíthető.

A verseny feleletválasztós teszt-jellegű: mindegyik feladat után öt különböző lehetséges eredmény található, amelyek közül pontosan egy helyes. A versenyzőknek a rendelkezésükre álló meglehetősen rövid idő: *90 perc* alatt mindegyik feladathoz meg kell jelölniük a véleményük szerint helyes eredményt.

A versenyzők teljesítményét pontozzák: egy-egy tanuló összes pontjának számát a $4H - R + 30$ képlettel állapítják meg, ahol H a helyes, R pedig a rossz válaszok számát jelöli. Eszerint a megszerezhető legkevesebb pont 0, a legtöbb 150. E két határ között — hat szám kivételével — elvileg bármely egész pontszámot el lehet érni.

A versenyzőknek megengedett fogalmazványpapír, kockás papír, vonalzó, körző és törlőgumi használata, logarlécé és zsebszámológépé azonban nem.

A verseny szervezői megengedik, hogy az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán külföldi államok tanulói is részt vehessenek saját országukban. E célból idejekorán rendelkezésre bocsátják a versenyfeladatok szövegét, a teszt kiértékelésére szolgáló sablont és a feladatok megoldását — természetesen angol nyelven — az ún. külföldi koordinátorok számára, akik felelősek a verseny korrekt lebonyolításáért saját hazájukban.

Az említett anyagok rendelkezésre bocsátása térítésmentes, mindössze annyi a kikötés, hogy külföldön nem lehet előbb megtartani a versenyt, mint az Egyesült Államokban, továbbá megadott szempontok szerint el kell készíteni és meg kell küldeni a külföldi koordinátori jelentést, valamint a tesztfeladatok szövegének az illető országban használt változatából egy példányt.

1981-ben az Egyesült Államokon kívül a következő országok egyes tanulói vettek részt az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán: Anglia, Ausztrália, Belgium, Finnország, Íror-

ság, Izrael, Jamaica, Kanada, Luxemburg, Magyarország, Malaysia és Olaszország.

Magyarországon — az elmúlt évekhez hasonlóan — a központi olimpiai szakkörök tagjai vettek részt ezen a versenyen, mégpedig Budapestről 78-an, Debrecenből 25-en, Győrből 26-an, Miskolcról 20-an, Nagykanizsáról 21-en, Pécsről 12-en, Szegedről 37-en, Székesfehérvárról 25-en, végül Veszprémből 14-en, összesen tehát 258-an küldték be a tesztfeladatokra adott megoldásukat. Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán részt vevő magyar tanulók száma lassú emelkedést mutat.

Idén Magyarországon március 9-én, kedden 14 órai kezdettel bonyolították le ezt a versenyt az előbbiekben felsorolt 9 városban egyidejűleg, tehát ugyanazon a napon, mint az Egyesült Államokban.

II. A feladatok

1. Ha az x^3-2 polinomot elosztjuk az x^2-2 polinommal, akkor a maradék

(A) 2, (B) -2, (C) $-2x-2$, (D) $2x+2$, (E) $2x-2$.

2. Ha egy számot, amely nyolcszor akkora, mint x, kettővel növelünk, akkor az eredmény negyede egyenlő

(A) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)$-del, (B) $\left(x+\frac{1}{2}\right)$-del, (C) $(2x+2)$-vel,

(D) $(2x+4)$-gyel, (E) $(2x+16)$-tal.

3. Számítsuk ki $(x^x)^{(x^x)}$ értékét $x=2$ esetén! Az eredmény:

(A) 16, (B) 64, (C) 256, (D) 1024, (E) 65 536.

4. Egy félkörlemez kerülete centiméterekben mérve ugyanakkora, mint négyzetcentiméterekben mért területe. Ekkor a félkör sugara, centiméterekben mérve:

(A) π, (B) $\frac{2}{\pi}$, (C) 1, (D) $\frac{1}{2}$, (E) $\frac{4}{\pi}+2$.

5. A pozitív x és y számok aránya $a:b$, ahol $0<a<b$. Ha $x+y=c$, akkor x és y közül a kisebbik egyenlő

(A) $\frac{ac}{b}$-vel, (B) $\frac{bc-ac}{b}$-vel, (C) $\frac{ac}{a+b}$-vel, (D) $\frac{bc}{a+b}$-vel, (E) $\frac{ac}{b-a}$-val.

6. Ha összeadjuk egy konvex sokszög belső szögeit — egyikük kivételével, akkor összegül 2570°-ot kapunk. Ez esetben a kimaradt szög mérőszáma:

(A) 90°, (B) 105°, (C) 120°, (D) 130°, (E) 144°.

7. Ha az $x*y$ műveletet úgy definiáljuk, hogy $x*y=(x+1)(y+1)-1$, akkor a következő állítások melyike **hamis**?

(A) $x*y = y*x$ minden valós x, y számpárra.

(B) $x*(y+z) = (x*y)+(x*z)$ minden valós x, y, z számhármasra.

(C) $(x-1)*(x+1) = (x*x)-1$ minden valós x-re.

(D) $x*0 = x$ minden valós x-re.

(E) $x*(y*z) = (x*y)*z$ minden valós x, y, z számhármasra.

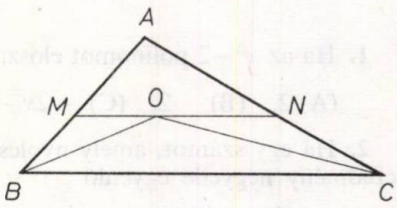
8. Definíció szerint $r!=r(r-1)...1$ és $\binom{j}{k}=\frac{j!}{k!(j-k)!}$, ahol r, j és k pozitív egész számok és $k<j$. Ha $n>3$ esetén $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ számtani sorozatot alkotnak, akkor n egyenlő

(A) 5-tel, (B) 7-tel, (C) 9-cel, (D) 11-gyel, (E) 12-vel.

9. Egy függőleges egyenes a (0; 0), (1; 1) és (9; 1) csúcsú háromszöget két egyenlő területű részre vágja szét. Ekkor az egyenes egyenlete: $x=$

(A) 2,5, (B) 3,0, (C) 3,5, (D) 4,0, (E) 4,5.

10. A mellékelt ábrán BO felezi a CBA szöget, CO felezi az ACB szöget, és MN párhuzamos BC-vel. Ha $AB=12$, $BC=24$ és $AC=18$, akkor az AMN háromszög kerülete



(A) 30, (B) 33, (C) 36, (D) 39,

(E) 42.

11. Hány olyan, csupa különböző számjegyből álló négyjegyű szám van 1000 és 9999 között, amelyekben az első és utolsó számjegy közötti különbség abszolút értéke pontosan 2?

(A) 672, (B) 784, (C) 840, (D) 896, (E) 1008.

12. Legyen $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$, ahol a, b és c konstansok. Ha $f(-7)=7$, akkor $f(7)$ egyenlő

(A) -17-tel, (B) -7-tel, (C) 14-gyel, (D) 21-gyel,

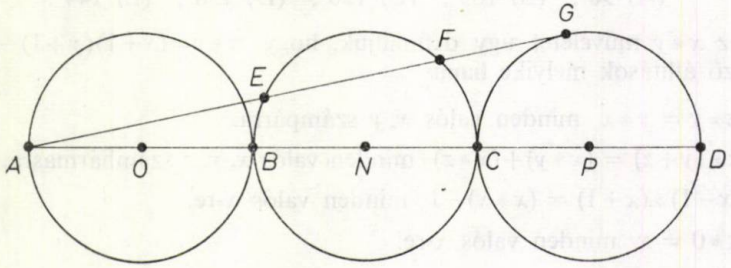
(E) nem határozható meg egyértelműen.

13. Ha $a>1$, $b>1$ és $p=\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$, akkor a^p egyenlő

(A) 1-gyel, (B) b-vel, (C) $\log_a b$-vel, (D) $\log_b a$-val, (E) $a^{\log_b a}$-val.

14. A mellékelt ábrán a B és a C pont az AD szakaszon van, továbbá AB, BC és CD az O, N, illetve P középpontú kör átmérője. E körök mindegyikének sugara 15, és az AG egyenes a P középpontú kört a G pontban érinti. Ha AG az N középpontú kört az E és F pontban metszi, akkor az EF húr hossza

(A) 20, (B) $15\sqrt{2}$, (C) 24, (D) 25, (E) ezek egyike sem.



15. Jelölje $[z]$ azt a legnagyobb egész számot, amely még nem nagyobb z-nél! Az x és y kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$y = 2[x]+3,$$

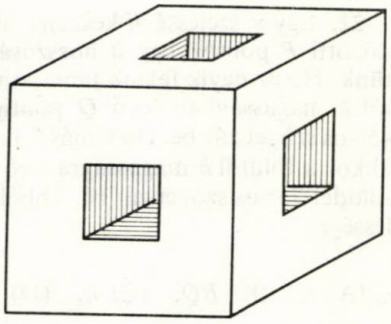
$$y = 3[x-2]+5.$$

Ha x nem egész, akkor $x+y$

(A) egész, (B) 4 és 5 közé esik, (C) -4 és 4 közé esik,

(D) 15 és 16 közé esik, (E) 16,5.

16. A mellékelt ábrán látható fakocka éleinek hossza 3 méter. Mindegyik lap közepén egy-egy 1 méter oldalhosszúságú négyzetes lyukat vágtak a szemben levő lapig. A lyukak élei párhuzamosak a kocka éleivel. A teljes felszín — beleértve a kocka belső részét is — négyzetméterekben:



(A) 54, (B) 72, (C) 76, (D) 84,

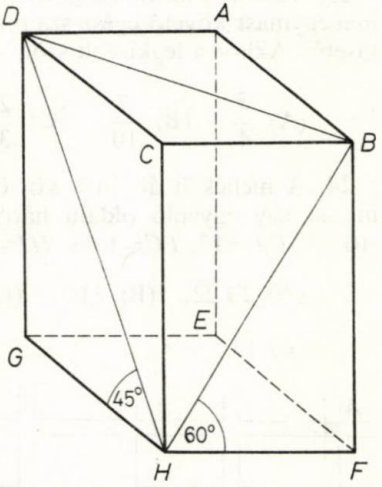
(E) 86.

17. Hány x valós szám elégíti ki a következő egyenletet:

$3^{2x+2}-3^{x+3}-3^x+3 = 0$?

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) 4.

18. A mellékelt ábrán látható téglatesten $DHG\sphericalangle = 45°$ és $FHB\sphericalangle = 60°$. Mekkora a $BHD\sphericalangle$ cosinusa?



(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$, (B) $\frac{\sqrt{2}}{6}$, (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$,

(D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$, (E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

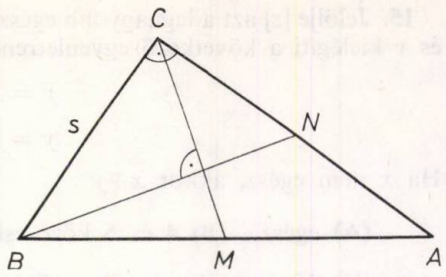
19. Legyen $f(x)=|x-2|+|x-4|-|2x-6|$ a $2 \leqq x \leqq 8$ értékekre! Ekkor $f(x)$ legnagyobb és legkisebb értékének összege

(A) 1, (B) 2, (C) 4, (D) 6, (E) ezek egyike sem.

20. Azoknak a pozitív egészekből álló $(x; y)$ számpároknak a száma, amelyek kielégítik az $x^2+y^2=x^3$ egyenletet:

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) nem véges, (E) ezek egyike sem.

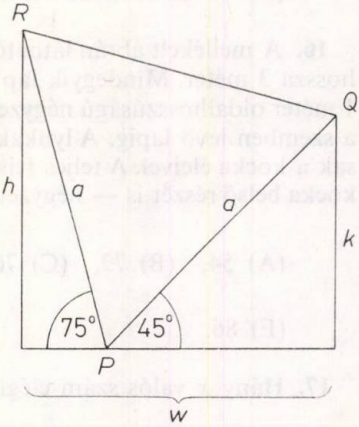
21. A mellékelt ábrán az ABC háromszög derékszögű, mégpedig $BCA\sphericalangle = 90°$. A CM súlyvonal merőleges a BN súlyvonalra, és a BC oldal hossza s. Ekkor BN hossza:



(A) $s\sqrt{2}$, (B) $\frac{3}{2}s\cdot\sqrt{2}$, (C) $2s\sqrt{2}$,

(D) $\frac{s\sqrt{5}}{2}$, (E) $\frac{s\sqrt{6}}{2}$.

22. Egy w szélességű keskeny sikátorban a falak közötti P pontba egy a hosszúságú létrát helyeztünk. Ha az egyik falnak támasztjuk, akkor a földtől k magasságban levő Q pontig ér és a földdel 45°-os szöget zár be. Ha a másik falnak támasztjuk, akkor a földtől h magasságra levő R pontig ér és a földdel 75°-os szöget zár be. Ebből a sikátor w szélessége

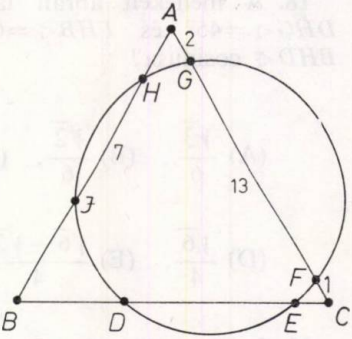


(A) a, (B) RQ, (C) k, (D) $\frac{h+k}{2}$, (E) h.

23. Valamely háromszögben az oldalak mérőszámai egymást követő egész számok, és a legnagyobb szög kétszer akkora, mint a legkisebb. Akkor a legkisebb szög cosinusa

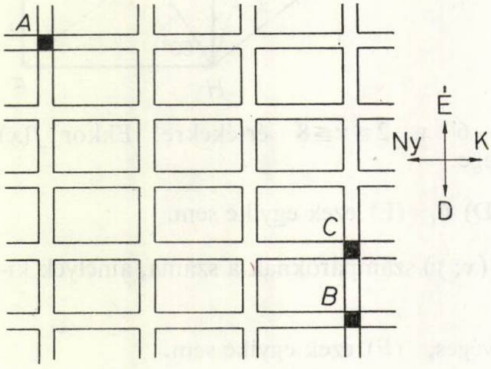
(A) $\frac{3}{4}$, (B) $\frac{7}{10}$, (C) $\frac{2}{3}$, (D) $\frac{9}{14}$, (E) ezek egyike sem.

24. A mellékelt ábrán a kör összesen hat pontban metszi egy egyenlő oldalú háromszög oldalait. Ha $AG=2$, $GF=13$, $FC=1$ és $HJ=7$, akkor DE hossza



(A) $2\sqrt{22}$, (B) $7\sqrt{3}$, (C) 9, (D) 10,

(E) 13.



25. A mellékelt ábra egy városrész térképe: a kis téglalapok háztömböket jelölnek, a köztük levő üres részek pedig utcákat. Egy tanuló minden reggel az A útkereszteződéstől a B útkereszteződésig gyalogol, minden esetben csak az ábrán feltüntetett utcákon, és mindig csupán keleti vagy déli irányban.

Változatosság kedvéért minden egyes útkereszteződésnél, ahol módjában áll választani, hogy keleti vagy déli irányba folytatja útját, (a többi választástól függetlenül) $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választ a két lehetőség között. Mekkora annak valószínűsége, hogy bármely napon áthalad a C útkereszteződésen?

(A) $\frac{11}{32}$, (B) $\frac{1}{2}$, (C) $\frac{4}{7}$, (D) $\frac{21}{32}$, (E) $\frac{3}{4}$.

26. Ha egy teljes négyzet a 8-as számrendszerben $ab3c$ alakú, ahol $a \neq 0$, akkor c

(A) 0, (B) 1, (C) 3, (D) 4, (E) nem egyértelműen meghatározott.

27. Tegyük fel, hogy $z=a+bi$ gyöke a

$$c_4 z^4 + ic_3 z^3 + c_2 z^2 + ic_1 z + c_0 = 0$$

algebrai egyenletnek, ahol a, b, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 valós állandók, és $i^2 = -1$. Az alábbi számok közül melyiknek kell szintén az adott egyenlet gyökének lennie?

(A) $-a-bi$, (B) $a-bi$, (C) $-a+bi$, (D) $b+ai$, (E) egyik sem.

28. A táblára felírtuk, 1-gyel kezdve, az egymás után következő pozitív egész számok sorozatát — egy bizonyos számig bezárólag, majd letöröltünk egyet a felírt számok közül. A megmaradtak átlaga (számtani közepe) $35\frac{7}{17}$. Melyik számot töröltük le?

(A) 6, (B) 7, (C) 8, (D) 9, (E) nem határozható meg.

29. Legyen x, y és z három olyan pozitív (valós) szám, amelyeknek összege 1. Ha e számok egyike sem nagyobb, mint bármely másiknak kétszerese, akkor az xyz szorzat lehető legkisebb értéke

(A) $\frac{1}{32}$, (B) $\frac{1}{36}$, (C) $\frac{4}{125}$, (D) $\frac{1}{127}$, (E) ezek egyike sem.

30. Milyen számjegy áll

$$(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$$

tízes számrendszerben kifejezett alakjában az egyenesek helyén?

(A) 0, (B) 2, (C) 5, (D) 9, (E) ezek egyike sem.

III. A feladatok helyes megoldása

rendre a következő betűk mellett található:

E—A—C—E—C—D—B—B—B—A—C—A—D—C—D—
—B—C—D—B—D—E—E—A—A—D—B—C—B—A—D

IV. A magyar versenyzők eredménye

Az előbbiekben említettük már, hogy ebben az évben összesen 258 magyar tanuló vett részt az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán. Ők együttesen 48 középiskolát képviseltek.

Közülük 19-en szereztek a versenyen legalább 100 pontot; 73-an pedig legalább 80, legfeljebb azonban 99 pontot. Ez utóbbiak között 11 olyan tanuló volt, aki a jelen tanévben valamely középiskolának legfeljebb II. osztályába járt.

A legalább 100 pontot szerzett magyar versenyzők névsora (az ilyen teljesítményt minden résztvevő államban kiemelkedőnek tekintik; az Egyesült Államokban ezeket a tanulókat hívják be az ő Matematikai Olimpiájukra):

1. **Károlyi Gyula,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója 127 ponttal;
2. **Danyi Pál,** a pécsi Nagy Lajos Gimnázium III. osztályos tanulója 123 ponttal;

3—4. **Bálint Attila,** a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Szabó Endre,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója 119—119 ponttal;

5—6. **Tardos Gábor,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Tóth Gábor,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója 118—118 ponttal;

7. **Honti Gábor,** a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója 117 ponttal;

8—9. **Csáki Csaba,** a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Papp Tibor,** a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója 114—114 ponttal;

10. **Megyesi Gábor,** a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium I. osztályos tanulója 109 ponttal;

11—12. **Kerényi Gábor,** a budapesti Eötvös József Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Kőházi Zoltán,** a székesfehérvári József Attila Gimnázium III. osztályos tanulója 105—105 ponttal;

13—14. **Mohay Tamás,** a veszprémi Lovassy László Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Török Sándor,** a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója 104—104 ponttal;

15—16. **Kiss Erika,** a székesfehérvári József Attila Gimnázium III. osztályos tanulója és **Nacsa János,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályos tanulója 103—103 ponttal;

17—19. **Erdős László,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium II. osztályos tanulója, **Kende Ágnes,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályos tanulója és **Mócsy Miklós,** a budapesti I. István Gimnázium II. osztályos tanulója 101—101 ponttal.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat 1979-től évenként versenyt rendez a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására. A versenyen részt vehetnek az alsó és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny feladatmegoldásból áll. A 8-10 feladatot minden év júliusában teszi közzé a Versenybizottság A Mate-

matika Tanítása című folyóiratban. (A versenyfeladatok beszerezhetők még a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, valamint a Társulat központjában és helyi tagozataiban személyesen vagy postán. Az utóbbi esetben kérjük egy megcímzett válaszboríték küldését is.)

A 8-10 feladatot azonos témakörből tűzik ki. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyeknek ismerete igen jól hasznosítható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában.

A júliusban kezdődő verseny előtt a Versenybizottság minden évben megjelentet egy 2-3 cikkből álló sorozatot A Matematika Tanítása című folyóiratban, amellyel segítséget kíván nyújtani a versenyfeladatsor megoldásához. E cikksorozat feladatokkal és elméleti összefoglalóval tájékoztatja a versenyen indulni kívánókat az évi témakörökről.

A cikksorozatban megjelent feladatok megoldásának beküldését nem kéri a Versenybizottság. A feladatokat és az elméleti anyagot minden év júliusában a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén az érdeklődők a cikksorozat szerzőinek irányításával szemináriumi formában dolgozzák fel.

A verseny eredményét minden év decemberében hirdetik ki. A Társulat pénzjutalomban részesíti a versenyen legeredményesebben szereplőket.

A versenyfeladatok

1. Egy f függvényről tudjuk, hogy $|f''| \leqq M$ a [0, 1] intervallumban. Bármely pontban ki tudjuk számítani f értékét 0,01 pontossággal. Szeretnénk megállapítani f-nek [0, 1]-beli maximumát 0,1 pontossággal. Adjunk meg erre algoritmust, és igazoljuk az algoritmus helyes voltát!
2. Adott a síkon n pont; koordinátáik: $(x_i; y_i)$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$. Írjuk le az n pont konvex burkát, azaz adjuk meg vagy a határoló egyeneseinek egyenletét, vagy a konvex burok csúcsainak koordinátáit! Adjunk meg algoritmust ezek megtalálására cn^2 lépésben! Lehet-e konstruálni ennél gyorsabb algoritmust?
3. Ismert játék a sakktáblán a VADÁSZOK A NYUSZI ELLEN: csak fehér mezőkön játszunk; a tábla egyik szélén felállítunk a 4 fehér mezőre 4 fehér bábut: ezek a vadászok. A szemközti oldal fehér sarkába állítunk egy fekete bábut: ez a nyuszi. A nyuszi átlósan előre és hátra léphet, a vadászok csak átlósan ELŐRE. Ha a vadászok beszorítják a nyuszit — tehát a nyuszi már nem tud lépni —, akkor a vadászok nyertek, ellenkező esetben a nyuszi. Mivel a vadászok csak előre léphetnek, ezért a játék legkésőbb 4×7 lépés után befejeződik. A játékot a nyuszi kezdi, majd egy fehér és a fekete bábu váltakozva lép. Döntsük el, hogy optimális játék esetén a nyuszi nyer-e, vagy a vadászok! Dolgozzunk ki a nyertes számára nyerő algoritmust! (Ajánlatos először kipróbálni a játékot.)
4. Coppelius mester robotgépébe, Coppeliába egy véges memóriájú számítógépet szerelt be. Coppelia persze nem látja a külvilágot, pedig végig kellene mennie egy végtelen sakktábla mezőin. Bizonyítsuk be, hogy akármilyen programot is teszünk a számítógépbe, mindig lesz olyan mező, amelyre Coppelia sohasem jut el! (Szaknyelven ezt úgy mondanánk, hogy egy véges automata nem tudja bejárni a — végtelen — négyzetrácsot.)
5. Coppelius cselt eszel ki: három mágnesdarabot helyez el Coppelia zsebében. Coppelia ezeket leteheti a végtelen sakktábla bármelyik mezőjére, és ha újra ugyanarra a mezőre kerül, akkor megérzi a mágneseket. Ilyenkor, ha akarja, zsebre is vághatja a mágneseket, és máshol újra leteheti azokat. Sikerült-e ily módon elérnie Coppeliusnak, hogy robotgépe bejárja az egész sakktáblát? Ha igen, akkor hogyan?

6. Varangyok láthatatlan tankokat küldtek a Földre, amelyek egy végtelen négyzetrács pontjaiban ugrálhatnak ide-oda. Mindegyik tankot egy véges memóriájú számítógép vezérli. Anélkül, hogy ismernénk a tankok programjait, tudunk-e olyan algoritmust készíteni, amelyik biztosan kilövi a tankokat? (A tankok csak egész óra elteltével változtatnak helyet; és ha egy rácspontba bombát dobunk, akkor az ott levő tank felrobban.)
7. Írjunk olyan programot, amely akkor és csak akkor áll meg, ha nem igaz a Fermat-sejtés, vagyis ha vannak olyan x, y, z és n pozitív egész számok, melyekre $n>2$ és $x^n+y^n=z^n$.
8. Egy számológép csak véges sok memóriarekesszel rendelkezik, de három, végtelen hosszú mágnesszalag van hozzácsatolva. Az első mágnesszalagon fel van sorolva n darab (valós) szám, amelyeket nagyság szerint növekvő sorrendbe szeretnénk rendezni. A mágnesszalagokon a számokat kizárólag előrehaladva, egymás után tudjuk leolvasni, illetve felírni. Mindegyik mágnesszalagot vissza lehet tekerni az elejére, üresre lehet törölni; illetőleg ha beírunk egy számot, akkor az utána álló összes szám automatikusan törlődik. A visszatekerés annyi időegységet vesz igénybe, ahány hely — azaz a mágnesszalagra felírt szám — fölött haladunk el. Készítsünk olyan algoritmust, amely az első mágnesszalagon levő n számot $c \cdot n \cdot \ln n$ időegység alatt helyezi el nagyság szerint növekvő sorrendben valamelyik mágnesszalagon!

Kérjük a versenyzőket, hogy minden feladat megoldását külön lapra írják. Részfeladat megoldását is örömmel látjuk.

Beküldési határidő: 1982. október 15.

Cím: Bolyai János Matematikai Társulat „Tanárok versenye"

Budapest, Anker köz 1—3., I. emelet 111.; 1061

Minden versenyzőnek sok sikert kíván a

Versenybizottság

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1005. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$4xyz = (y+z)(yz+2) = (x+y)(xy+2) = (x+z)(xz+2).$$

Deák Imre, Székelyudvarhely

1006. A $b=3k+1$ alapú számrendszerben hány olyan xyz_b háromjegyű szám van, amelyben a jegyek különbözőek, egyikük sem nulla, és a jegyek ciklikus cseréjével adódó xyz_b, yzx_b, zxy_b számok a felírt sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme?

1007. Legyen f a pozitív egész számok halmazán definiált függvény. Számítsuk ki a

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

értéket, ha $f(1)=6$ és $f(x+y)=f(x)2^y+f(y)2^x+9\cdot 2^{x+y}$ minden x, y pozitív egészre.

Pogány János, Budapest

1008. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív tagú (x_n) sorozatra

$$x_1 \leqq \frac{1}{2a} \quad \text{és} \quad x_{n+1} = x_n - ax_n^2,$$

akkor az (nx_n) sorozat konvergens! Határozzuk meg e sorozat határértékét is!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1009. Az $ABCD$ derékszögű trapéz AC és BD átlói merőlegesek egymásra, közös pontjuk az M. Szerkeszthető-e a trapéz, ha az MB és MC szakaszok adottak?

Horváth Tibor, Dunakeszi

1010. A tér egy O pontján átmenő a, b, c, d egyenesekre: $a \perp c$ és $b \perp d$ teljesül. Az $[a, b]$ és $[c, d]$ síkok metszésvonalát jelölje u, az $[a, d]$ és $[b, c]$ síkok metszésvonalát pedig v. Bizonyítsuk be: $u \perp v$!

Kárteszi Ferenc, Budapest

Feladatmegoldások (981—986.)

981. Ketten felváltva húznak n darab golyóból tetszés szerinti (pozitív egész) számú golyót, de minden húzáskor legfeljebb a darabot. Az veszít, akire az utolsó $b\ (>0)$ darab golyó maradt. Mi a kezdő húzó nyerőstratégiájának a feltétele?

Megoldás: Belátjuk, hogy a kezdő húzó akkor és csak akkor nyer, ha $a+1$ nem osztója $n-b$ (>0)-nak, és egyik játékos sem hibázik a játék során. Jelölje A a kezdőhúzót, társát pedig B, legyen továbbá

$$n-b = (a+1)k+r,$$

ahol $0<r<a+1$ és k nem negatív, r pozitív egész.

Ha x_i, illetve y_i jelöli az A, illetve a B i-edik húzásakor elvett golyók számát, akkor

$$x_1 = r, \quad x_i = a+1-y_{i-1} \quad (i \geqq 2)$$

stratégiával A biztosan nyer, mert a két játékos A-nak $(k+1)$-edik húzásával összesen

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i + \sum_{i=1}^{k_1} y_i = r+k(a+1) - \sum_{i=2}^{k+1} y_i - 1 + \sum_{i=1}^{k_1} y_i = r+k(a+1) = n-b$$

golyót vett el, ezért B-nek maradt a b darab golyó.

Ha $n-b = k(a+1)$ akkor, B

$$y_i = a+1-x_i \quad (1 \leqq i \leqq k)$$

húzásokkal a k-adik lépésben nyer, hiszen

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + k(a+1) - \sum_{i=1}^{k} x_i = k(a+1) = n-b,$$

tehát A-nak maradt a b darab golyó.

Pataki János, Szatmár

A megoldók száma: 14.

982. Határozzuk meg az

$$x^4+2x^3-4x^2-2x+3 = y^2$$

egyenlet egész megoldásait!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

Megoldás: Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(x-1)^2(x+1)(x+3) = (x-1)^2[(x+2)^2-1] = y^2.$$

Ebből azonnal adódik, hogy a

$$(-3;\ 0),\quad (-1;\ 0),\quad (1;\ 0)$$

párok egyenletünket kielégítik.

Több megoldás nincs, hiszen $(x+2)^2-1$ négyzetszám kell legyen, azaz

$$(x+2)^2-z^2 = (x+z+2)(x-z+2) = 1$$

fenn kell álljon.

A tényezők egészek, tehát mindkettő vagy 1, vagy -1. Ezekkel pedig az első két számpárhoz jutunk.

Bencze Mihály, Brassó és Kiss László, Csíkszereda

Megjegyzés: A feladat többféleképpen is általánosítható. Ezek közül az elsőt *Kiss László, Csíkszereda*, a további kettőt *Bencze Mihály, Brassó* közli:

(1) Az

$$(x-d)^2(ax^2+bx+c) = y^2$$

egyenletnek nincs, vagy véges sok természetes egész megoldása van, ha az a, b, c, d pozitív egészekre teljesül: a négyzetszám és b az a-nak páros többszöröse.

(2) Az

$$(x-a)^2[(x-b)^2-2^{2m+p+2}] = y^2$$

egyenletnek legalább $2m+1$ egész megoldása van, ha a, b egész számok, m és p természetes számok.

(3) Az

$$(x-a)^2[(x-b)^2-1] = ny^2$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van, ha

$$n(>1),\quad a \text{ és } b \text{ egészek.}$$

Ezek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

A megoldók szdma: 25.

983. Legyen P az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög síkjának tetszőleges pontja! Jelölje Q_i a P talppontját az A_iA_{i+1} egyenesen ($A_{n+1} \equiv A_1$). Bizonyítsuk be, hogy az A_iQ_i előjeles távolságok összege a sokszög fél kerületével egyenlő! (Az A_iQ_i távolság pozitív, ha az A_i nem választja el a Q_i, A_{i+1} pontpárt. Ellenkező esetben a távolság negatív.)

Megoldás: Felhasználjuk, hogy egy **e** egységvektor és egy tetszőleges **a** vektor **ea** skaláris szorzata az **a** vektornak az **e** vektor egyenesén levő merőleges vetületének előjeles hossza.

Feltehetjük, hogy a szabályos n-szög oldala egységnyi hosszúságú.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \mathbf{e}_i,\quad \overrightarrow{A_iO} = \mathbf{r}_i,\quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{p}.$$

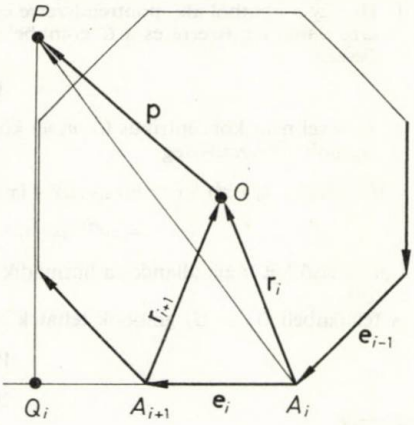
Az $\overline{A_iQ_i}=\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i+\mathbf{p})$ előjeles távolság akkor és csak akkor pozitív, ha az $\mathbf{e}_i$ és az $\mathbf{r}_i+\mathbf{p}=\overrightarrow{A_iP}$ vektorok szöge hegyesszög, ha tehát A_i nem választja el a Q_i, A_{i+1} pontpárt.

Ezek szerint:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_iQ_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i+\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i\mathbf{r}_i + \mathbf{p}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i.$$

Mivel $\mathbf{e}_i\mathbf{r}_i=\frac{A_iA_{i+1}}{2}$ és $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i=\mathbf{0}$, ezért (1) jobb oldalán a szabályos n-szög félkerülete áll.

Náfrádi Ferenc, Győr



I. Megjegyzés: Bizonyításunkban nem használtuk fel, hogy P a sokszög síkjának pontja, ezért a feladatbeli tulajdonság a tér tetszőleges P pontjára teljesül.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

II. Megjegyzés: Előbbi jelöléseinket módosítva, legyen

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{A_iP}.$$

Így az

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_i$$

egyenlőségből

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{i+1}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i-\mathbf{e}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i^2-2\mathbf{r}_i\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_1^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i\mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i^2,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i\mathbf{e}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i^2,$$

tehát az A_iQ_i előjeles távolságok összege a félkerület. Ez a megoldás a sokszög szabályosságából csak az oldalak egyenlőségét használja fel. A feladatbeli tulajdonsággal tehát minden olyan sokszög is rendelkezik, amelynek oldalai egyenlők.

Kiss László, Csíkszereda

A megoldók száma: 11.

984. Az n pontból álló pontrendszer, az egységsugarú G_1 gömb, továbbá a $\sqrt{2}$ sugarú G_2 gömb úgy helyezkedik el a térben, hogy a G_1 gömbfelület bármely pontjának az adott n darab ponttól mért távolságainak négyzetösszege 1919 és a G_2 gömbfelület bármely pontjára az előbbi összeg 2000.

Határozzuk meg az n értékét!

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Tekintsünk előbb egy r sugarú G gömböt és n számú pontból álló pontrendszert! Válasszuk a gömb középpontját a térbeli koordináta-rendszer kezdőpontjául! A gömb egyenlete ekkor

$$x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

az n számú pont koordinátái pedig

$$(a_i, b_i, c_i) \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Legyen az (x_0, y_0, z_0) pont a G gömbön. E pontnak az adott pontrendszer pontjaitól való távolságainak a négyzetösszege:

$$(*) \qquad d = \sum_{i=1}^{n} [(x_0-a_i)^2+(y_0-b_i)^2+(z_0-c_i)^2] =$$

$$= n(x_0^2+y_0^2+z_0^2) + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2+c_i^2) - 2x_0\sum_{i=1}^{n} a_i - 2y_0\sum_{i=1}^{n} b_i - 2z_0\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

A d négyzetösszeg akkor és csak akkor lesz a G gömb bármely (x_0, y_0, z_0) pontjára ugyanakkora, ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = 0.$$

E feltétel elégségessége nyilvánvaló, mivel $x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2$ és $\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i+c_i^2)=s$ állandók. A feltétel szükségessége pedig rendre az $(r;0;0)$, $(0;r;0)$ és $(0;0;r)$ gömbi pontok választásával igazolható. Ezért

$$d = nr^2+s.$$

Eredményünknek két következménye van:

1. Ha egy n pontból álló pontrendszerre és egy r sugarú G gömbre a d négyzetösszeg állandó, akkor erre a pontrendszerre és a G gömbbel koncentrikus r^* sugarú G^* gömbre is állandó a négyzetösszeg:

$$\bar{d}^* = n(r^*)^2+s.$$

2. A G-vel nem koncentrikus $(u;v;w)$ közepű $\bar{r}$ sugarú $\bar{G}$ gömb $(x_0;y_0;z_0)$ pontjára a $(*)$ szerint számolt négyzetösszeg:

$$\bar{d} = n(x_0^2+y_0^2+z_0^2)+s = n[(x_0-u)^2+(y_0-v)^2+(z_0-w)^2-(u^2+v^2+w^2)+2(ux_0+vy_0+wz_0)]+s =$$
$$= n\bar{r}^2+[s-(u^2+v^2+w^2)]+2n(ux_0+vy_0+wz_0).$$

Ennek első két tagja állandó, a harmadik viszont nem, mivel függ a $\bar{G}$ gömb pontjának koordinátáitól!

A feladatbeli G_1 és G_2 gömbök tehát koncentrikusak, s ezekre:

$$1919 = n\,1^2+s$$
$$2000 = n(\sqrt{2})^2+s,$$

amiből

$$n = 81.$$

Végül megadunk egy 81 pontból álló, a feltételeket kielégítő pontrendszert. Tekintsük az origó közepű a sugarú gömb 40 átmérőjének végpontjait, továbbá az origót.

Az átmérő két végpontjának a $G_i(i=1;2)$ gömb tetszőleges P_i pontjával alkotott távolságának négyzetösszege (Lásd ábrát!) ugyanakkora:

$$d_1^2+d_2^2 = 2a^2+2r_i^2,$$

tehát az általunk választott pontrendszernek a G_i gömbre vonatkozó négyzetösszege:

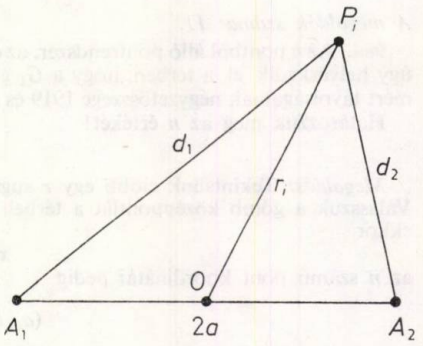
$$d = 80\,(a^2+r_i^2)+r_i^2 \quad (i = 1;\ 2).$$

Ebből, a feladat feltételeinek megfelelően, a meghatározható. Ugyanis

$$a^2 = \frac{d-81r_i^2}{80} = \frac{1919-81}{80} = \frac{2000-162}{80} = \frac{919}{40}.$$

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 8.



985. Tekintsük az alábbi, bűvös négyzetből alkotott A mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az A^k (k pozitív egész) mátrix elemeit!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: AMT **956.** feladata szerint a bűvös négyzetből alkotott A mátrix bármely A^k hatványának is meg lesz az a tulajdonsága, hogy elemeinek összege soronként és oszloponként állandó, mégpedig esetünkben 15^k.

Állítsuk elő az A mátrixot két mátrix összegeként:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} := P+5Q.$$

A P örökölte az A mátrix bűvös tulajdonságát: mind az egy sorban, mind az egy oszlopban levő elemek összege 0.

Emellett P hatványai bizonyos értelemben periodikus tulajdonságúak:

$$P^2=\begin{bmatrix}16&-8&-8\\-8&16&-8\\-8&-8&16\end{bmatrix},\quad P^3=\begin{bmatrix}-72&96&-24\\48&0&-48\\24&-96&72\end{bmatrix}=24P,\quad P^4=24P^2,$$

amiből

$$P^{2k}=24^kP^2 \quad \text{és} \quad P^{2k+1}=24^kP \qquad (k\geqq 1 \text{ egész})$$

adódik teljes indukcióval.

Ugyanakkor $P^k\cdot Q=Q\cdot P^k=0$ (*zérus*-mátrix) és $Q^k=3^{k-1}Q$, amint arról könnyen meggyőződhetünk.

Ezek felhasználásával, a binomiális tétel szerint

$$A^k=(P+5Q)^k=P^k+5^kQ^k=P^k+\frac{15^k}{3}Q.$$

Ez az A^k-t megadó formula k paritásától függ.

Legyen $k=2n+1$, ekkor

$$A^{2n+1}=24^nP+\frac{15^{2n+1}}{3}Q=\begin{pmatrix}-3\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3} & 4\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3} & -1\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3}\\ 2\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3} & \frac{15^{2n+1}}{3} & -2\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3}\\ 1\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3} & -4\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3} & 3\cdot 24^n+\frac{15^{2n+1}}{3}\end{pmatrix},$$

ha pedig $k=2n$

$$A^{2n}=24^nP^2+\frac{15^{2n}}{3}Q=\begin{pmatrix}16\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3}\\ -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & 16\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3}\\ -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & -8\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3} & 16\cdot 24^n+\frac{15^{2n}}{3}\end{pmatrix}.$$

Eredményünkből kitűnik, hogy A^{2n+1} maga is bűvös négyzet, míg A^{2n} „majdnem" bűvös négyzet: soraiban, oszlopaiban és a mellékátlóban levő elemek összege 15^{2n}.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 15.

986. $P(x)$ olyan m-ed fokú, egész együtthatós polinom, amelynek van legalább egy racionális gyöke és rendelkezik a következő tulajdonsággal: Létezik $n\,(m>n)$ darab $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ egész szám, amelyre $|P(\alpha_k)|=1$ $(k=1;2;\ldots;n)$.
Igazoljuk, hogy

$$\sum_{i<j}\ln(\alpha_j-\alpha_i)<\frac{n(n+1)}{2}!$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Legyen

$$P(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i,$$

ahol $a_i(0\leqq i\leqq m)$ egész szám.

Feltétel szerint létezik olyan p és q $(\neq 0)$ egész, melyre $(p;q)=1$ és $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$, következésképpen $P(x)$ osztható $(qx-p)$-vel, vagyis

$$P(x)=(qx-p)(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0). \qquad (1)$$

Bebizonyítjuk, hogy a hányados polinom együtthatói is egész számok.

Tegyük fel, hogy a $b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$ nem egész együtthatós polinom. Legyen k a legnagyobb szám, amelyre b_k nem egész. Az (1)-ből következik, hogy az

$$f(x)=(qx-p)(b_kx^k+\ldots+b_0)$$

polinom a következőképpen írható:

$$f(x)=P(x)-(qx-p)(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_{k+1}x^{k+1}).$$

Itt $f(x)$ együtthatói egészek, mivel $P(x)$ egész együtthatós, továbbá p, q és feltételünk miatt $b_{m-1}, \ldots, b_{k+1}$ egészek. Mivel $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, ezért q osztója $f(x)$ legnagyobb fokszámú tagja együtthatójának, tehát qb_k-nak, ezért b_k egész, ami ellentmondás. Ezért az (1) összefüggésben szereplő valamennyi együttható egész szám.

Ennek alapján, ha az α_k egész számra $|P(\alpha_k)|=1$, azaz

$$1=|(q\alpha_k-p)(b_{m-1}\alpha_k^{m-1}+\ldots+b_0)|=|q\alpha_k-p||b_{m-1}\alpha_k^{m-1}+\ldots+b_0|,$$

akkor a jobb oldali tényezők pozitív egész volta miatt

$$|q\alpha_k-p|=1.$$

Ebből tehát bármely k-ra

$$\alpha_k=\frac{p\pm1}{q}, \tag{2}$$

vagyis α_k csak két értéket vehet fel, tehát $1\leqq n\leqq 2$. Mivel $n=1$ esetén feladatunknak nincs értelme, így $n=2$ lehet csak. A bizonyítandó összefüggés tehát

$$\ln(\alpha_2-\alpha_1)<1.$$

A (2)-ből

$$\alpha_2-\alpha_1=\left|\frac{p+1}{q}-\frac{p-1}{q}\right|=\frac{2}{|q|}\leqq 2,$$

tehát

$$\ln(\alpha_2-\alpha_1)\leqq \ln 2<1,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megjegyzés: Könnyen adhatunk a feladat feltételeinek megfelelő polinomokat. Ilyenek például:

$$f_1(x)=x^m,\quad f_2=(2x-1)^m\quad (m\geqq 3).$$

Az első esetben $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, a másodikban $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ értékekre $|f_i(\alpha_i)|=1$ $(i=1,2)$.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora (981—986.)

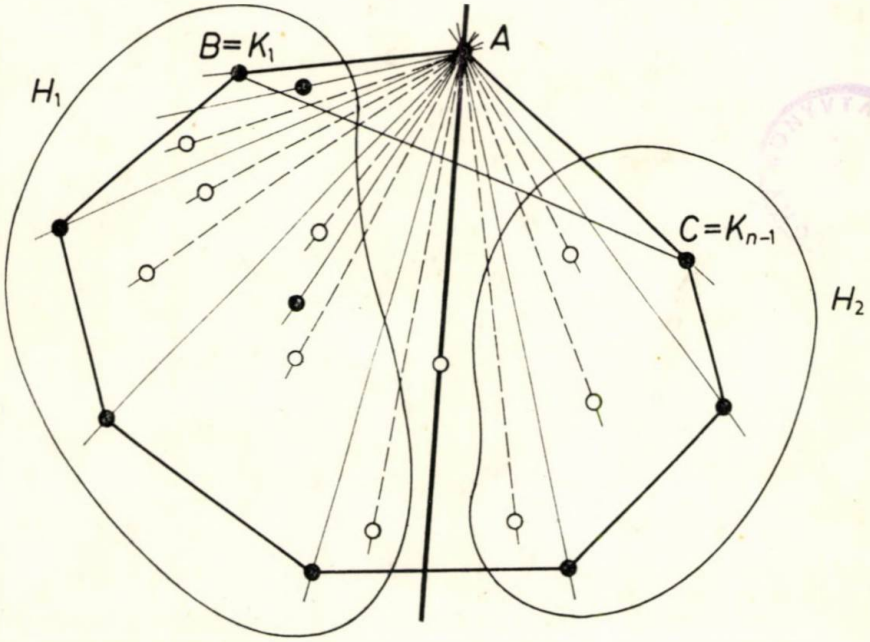
Ambrus Gabriella, Budapest (983., 984.), Bagi Gábor, Barcs (981.), Bartha Gábor, Szentendre (981—986.), Bencze Mihály, Brassó (982., 985., 986.), Bogdán Zoltán, Cegléd (981., 982., 985.), Borsovszky Rudolf, Budapest (982.), Csorba Ferenc, Győr, (982.), Csörsz Sándor, Dunakeszi (981., 982., 985.), Giczi Margit, Sümeg (982., 984., 985.), Gőgh József, Gúta (981., 982., 984.), Heverdle István, Eger (981)., Horváth Eszter, Szeged (981.), Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (982., 983., 985.), Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (982—986.), Kamarás Lajos, Pécs (981—986.), Kiss László, Csíkszereda (982., 983.), Kondor Judit, Budapest, (982., 986.), Kormos Gizella, Sümeg (982.), Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (982., 985.), dr. Major Pál, Budapest (982.), Máté Bálint, Pécs, (981., 982.), Molnár József, Szombathely (982.), Náfrádi Ferenc, Győr (983., 984.), Nyírő László, Mezőkövesd (981—983., 985.), Pataki János, Szatmár (981—983., 985., 986.), Propszt György, Szatmár (981—983., 985., 986.), Schutzbach Mártonné, Siófok (985.), Simon Béla, Nyíregyháza (982.), Szánthó Gyula, Gyula (981—983., 985.), Torkos Ferenc, Sümeg (981., 982.), Tuzson Zoltán, Marosvásárhely, (982., 984., 985.).

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1982. október * XXIX. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-3334 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055. Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Czeglédy István—Dr. Hajdu Sándor: Az oktatási-képzési folyamat tervezése (A matematikatanulás irányításáról III.) 129
Dr. Surányi János: Hérón-féle háromszögekről 135
Dr. Horváth Miklós: A függvényfogalom néhány jellegzetessége a 17. században 140
Dr. Takáts Ágostonné: A függvényvonalzó használata a középiskolai matematikaoktatásban 143
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Kecskeméten 146
Dr. Koller Lászlóné: A szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei 148
FELADATOK 152

СОДЕРЖАНИЕ

Цегледи Иштван — д-р Хайду Шандор: Планирование учебно-образовательного процесса (Об управлении обучением математики III) 129
Д-р Шурани Янош: О треугольниках Герона 135
Д-р Хорват Миклош: Некоторые особенности понятия функций в 17 в. 140
Д-р Такач Агоштонне: Использование функциональной линейки в обучении математике в средней школе 143
Д-р Шарницки Виктор: Передвижное собрание математиков в г. Кечкемет 146
Д-р Коллер Ласлоне: Положение, проблемы и возможности развития преподавания математики в профтехучилище 148
ЗАДАЧИ 152

INHALT

Czeglédy, István—Dr. Hajdu, Sándor: Die Planung des Unterrichts-Bildungs-Prozesses (Über die Lenkung des Mathematiklernens III.) 129
Dr. Surányi, János: Über Héronsche Dreiecke 135
Dr. Horváth, Miklós: Einige Eigenartigkeiten des Funktionsbegriffes im 17-ten Jahrhunderte 140
Frau Mária Takáts (geb.: Muzsik): Die Anwendung des Funktionslineals im Mathematikunterricht an den Mittelschulen ... 143
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wanderversammlung der Mathematiklehrer und -Professoren in Kecskemét 146
Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Die Situation, Probleme und Entwicklungsmöglichkeiten des Mathematikunterrichts in den Berufsschulen 148
AUFGABEN 152

CZEGLÉDY ISTVÁN—DR. HAJDU SÁNDOR
főiskolai adjunktus főiskolai docens
Nyíregyháza

Az oktatási-képzési folyamat tervezése

(A matematikatanulás irányításáról III.)

Matematikai gondolatokkal
matematikai gondolkodást.
(Skemp után szabadon.)

A tematikus tervezés szempontjairól, ezen belül a nevelési célrendszerről, a nevelési feladatok konkretizálásáról már szóltunk [1]. Ebben a dolgozatban az oktatási-képzési cél-, feladat- és követelményrendszer megszerkesztésének bemutatásával kísérletet teszünk egy olyan oktatási segédanyag kidolgozására, amelyben a tantervi követelményeket hozzáférhetőbbé, egyértelműbbé, egzaktabbá tehetnénk. Hangsúlyozzuk, hogy ezen rendszer kidolgozását — mint az egész pedagógiai folyamatot — az [1]-ben bemutatott nevelési célrendszer koordinálja.

Oktatási-képzési célon a konkrét (matematikai) tartalomhoz közvetlenül kapcsolódó pszichikus folyamatok, képződmények és tulajdonságok valamely rendszerének kialakítását, illetve fejlesztését értjük. Ez a rendszer az élmények, a képzetek, az ismeretek, bizonyos gondolkodási formák és műveletek, a fogalmak, az értelmi cselekvési tervek, a jártasságok, a készségek, a képességek, a szokások, a szemléletek, a beállítódások, az érzelmek, az értékítéletek stb. dinamikus egysége.

A nevelési célokhoz hasonlóan az oktatási-képzési céloknál is igaz, hogy az egy óra egy cél modell már idejétmúlt (sőt mindig is idejétmúlt volt!). Néhány érv ennek alátámasztására:

— Már szűkebb tananyagon belül is *az oktatási-képzési célok egész sorát kell megvalósítanunk.*

— *Az ismeretek rendszerét kell kialakítanunk, s ez a rendszerszemlélet megköveteli a témakörök közötti koncentrációt,* más szemszögből, az adott tartalmat több oldalról, különböző témakörökkel összefüggésben (komplexitás!) kell megközelítenünk.

— Ugyanahhoz a tartalomhoz kapcsolódva, különböző felkészültségű, adottságú, beállítottságú tanulók esetén más és más célok érhetők el. *Ez a differenciált tervezés szükségességét mutatja,* s ennek a célok tervezése során is jelentkeznie kell.

— *Az oktatási-képzési célok elérése is hosszabb folyamat eredménye.* Egy-egy órán csak lépéseket tehetünk a célok elérése érdekében. (Vö. „hosszú érlelési folyamat"!)

A táblázatban bemutatott (5. osztály: Adott tulajdonságú ponthalmazok című téma) oktatási-képzési cél, feladat- és követelményrendszerében (továbbiakban célrendszerében) a tananyagot az elsajátításához szükséges tanulói tevékenység összetettsége szerint csoportosítottuk. A tantárgypedagógiai javaslatok oszlopából kiolvasható, hogy a tananyag ezen elrendezése (terminológia — fogalomrendszer — közvetlen alkalmazás — alkotó alkalmazás) nem az időbeli sorrendiséget jelenti.

Aktuális tananyag	Célok és feladatok
I. *Terminológia, jelölések, rutinok*	
0.1. *„Párhuzamos", „merőleges", „... távolságra vannak", „kör*(vonal)*", „körlap",* „gömbfelület", *„gömb", „szakasz",* „párhuzamos egyenespár", „szakasz felezőmerőleges", ..., „legalább", „legfeljebb"-„pontosan".	*Minimum: A kiemelt elnevezések viszonylag tartósan beépülnek a szókincsbe;* a további elnevezések, jelölések beépülése megkezdődik. Jártasságok alakulnak ki a körző, illetve a vonalzók használatában.
0.2. ‖; ⊥; *AB.*	
0.3. *Körző, vonalzók használata.*	*Optimum: A felsorolt elnevezések és jelölések tartósan beépülnek,* szükség esetén automatikusan aktivizálhatók. Rutin a körző és a vonalzók használatában.
II. *Fogalmak, összefüggések*	
0.4. *A kör, a körlap, a gömbfelület, a gömb mint adott ponttól adott, adottnál nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkban, a térben.*	*Minimum: Élményalap a fogalomrendszer kialakulásához.* A halmazelméleti, a logikai fogalmi struktúra, illetve az elemi geometriai fogalmak kapcsolatba kerülnek, így *ezen geometriai fogalmak tartalma bővül.*
0.5. Egyenestől adott távolságra levő pontok halmaza a síkban, a térben.	
0.6. *Szakasz felezőmerőleges a síkban,* illetve a térben.	*Optimum:* A felsorolt geometriai fogalmak adott tulajdonságú pontok halmazaként jelennek meg, ... *Jártasság az intuitív élmények szóbeli (fogalmi) rögzítésében.* Kezd kialakulni az egzakt geometriai ismeretek elsajátításának a képessége. Fejlődik a térszemlélet.
0.7. Két párhuzamos, illetve metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban.	
III. *Közvetlen, eszközszerű alkalmazás*	
0.8. *Egyenestől adott távolságra, ..., levő pontok halmazának megkeresése,* megszerkesztése.	*Minimum: Manipulációhoz kötődő elemi cselekvési tervek, jártasságok alakulnak ki a* manipulációval nyert élmények egyszerűbb szerkesztésekben történő megjelenítésében, a halmazelméleti, illetve a geometriai ismeretek összekapcsolásában.
0.9. *Két adott mértani hely közös részének megkeresése,* megszerkesztése.	
0.10. A szerkesztés elvének alkalmazása a háromszögek, a paralelogrammák, a trapézok szerkesztésében.	
0.11. Szakasz felezőmerőleges szerkesztése.	
0.12. Mértani helyek keresése a koordináta-rendszerben.	*Optimum: A tárgyi manipuláción túllépő, összetettebb cselekvési tervek és jártasságok* a halmazelméleti, a logikai, illetve a geometriai fogalmak összekapcsolásában, szerkesztésekben történő alkalmazásában, a szerkesztések menetének indoklásában.
IV. *Alkotó alkalmazás*	
0.13. A 0.4—0.7-ben *kiemelt* (felsorolt) *fogalmak, összefüggések felfedezése.*	*Minimum: A tárgyi tevékenységre támaszkodó* analizálás, szintetizálás, rendezés, összehasonlítás, absztrahálás, általánosítás, konkretizálás, analógia képességének kialakulása, fejlődése. *Induktív kutatási tervek kiépülése. ...*
0.14. Egyéb mértani helyek (pl. parabola, ellipszis, ...) megkeresése a fogalom kialakítása nélkül.	
0.15. *Két,* illetve több *mértani hely egyidejű figyelembevételével megoldható, direkt utasítást nem tartalmazó feladatok elemzése, tervkészítés,* szerkesztés, igazolás, diszkusszió.	*Optimum:* Összetett problémamegoldó gondolkodási műveletek, továbbá a képi, illetve a fogalmi dominanciájú gondolkodás egymásba való átváltása képességének fejlődése. *Általános geometriai problémamegoldó stratégiák csíráinak megjelenése, fejlődése.* A deduktív igazolási képesség alapjainak kialakulása, a diszkutálási szempontok, eljárási módok elsajátítása, az ehhez szükséges beállítódás és képességek kialakulása.
0.16. Háromszög-, négyszögszerkesztési eljárások kidolgozása, alkalmazása.	
0.17. A háromszög köré írható körrel kapcsolatos fogalomkör „felfedezése".	

A sikeres tanulás eredménye	Tantárgypedagógiai javaslatok
Minimum: A tanuló megérti az elnevezéseket, a tanár, a tankönyv, ... utasításait követi. Képes párhuzamos, merőleges egyeneseket rajzolni, szakaszt, szöget másolni (esetleg utánzás útján).	A kiemelt fogalmak, szerkesztési eljárások „felfedeztetéséhez" *heterogén csoportmunkában* jutunk el.
Optimum: A tanuló — tanári felszólítás nélkül is — használja az elnevezéseket, jelöléseket. Ha a szerkesztések menetét megérti, akkor a kivitelezés nem okoz problémát.	*A „felfedezés" útja:* tárgyi manipuláció, kísérletezgetés, mérés — a tárgyi manipuláció megjelenítése rajzos formában — a tapasztalatok, sejtések megfogalmazása — logikai rendezés, a szerkesztési eljárások megtervezése — a terv végrehajtása — indoklás — diszkusszió. Ebben a fázisban kerüljük a frontális foglalkoztatást, a közlést — *a tanár közvetve irányítja a munkát.*
Minimum: ... Tárgyi tevékenységre, mérésekre támaszkodva (a kiemelt fogalmakkal kapcsolatosan) képes megfogalmazni, hogy az adott tulajdonságú pontok milyen alakzatra illeszkednek a síkban, illetve az adott alakzatok milyen tulajdonságú pontok halmazai. ...	*Használható eszközök:* olyan tárgyak, amelyek pontokkal, illetve egyenesekkel modellizálhatók (pl. sárgaborsó, hurkapálca, mágneses mozaikjáték stb.); Babylon, applikációs tábla, ... A távolságot a tárgyi manipuláció során is körzővel méretjük. ... A tankönyvből, illetve a munkalapokból hiányoznak a tárgyi manipuláltatásra építő, illetve a heterogén csoportmunkát megszervező feladatok. A szaktanár pótolja ezt a hiányt!
Optimum: (Esetleg önállóan megrajzolt ábrák segítségével) képes megfogalmazni, hogy a kérdéses alakzatok milyen tulajdonságú pontok halmazai, illetve, hogy az adott tulajdonságú ponthalmaznak milyen geometriai alakzat felel meg a síkban, illetve a térben. ...	A fogalmak, szerkesztési tervek tudatosításának, rögzítésének fázisában viszont célszerű frontális osztálymunkát alkalmazni. A tanár *következetesen használja* a helyes elnevezéseket, ugyanezt *megköveteli* a tanulóktól is. Az elkövetett hibákat a tanulókkal javíttatja. („Bele kell ütköztetni" a tanulókat a hibás szóhasználat „eredményeibe".) Az állandó tanári „miértek" a fogalomrendszer egzaktságának, szilárdságának fokozódását segítik elő. ...
Minimum: Manipulációra támaszkodva képes megszerkeszteni a megjelölt adott tulajdonságú ponthalmazokat; megkeresi, irányítással megszerkeszti két adott tulajdonságú ponthalmaz közös részét, egyesítését.	Az alkotó alkalmazás szintjén felfedezett fogalmak, szerkesztési eljárások eszközszerű alkalmazása és gyakorlása szerkesztéses *problémák megoldása közben történik.* Javasolt a homogén csoportmunka, mert így differenciálhatunk a tananyag tartalmában, a tárgyi és a gondolati tevékenység arányának megválasztásában, a problémák rejtettségében, összetettségében, a tanári segítség mértékében. A gyengébb adottságú gyerekekkel kezdetben kötetlen formában köröket, párhuzamos, merőleges egyeneseket rajzoltatunk, majd ezeket fokozatosan bekapcsoljuk a problémák megoldásába.
Optimum: ... a megoldási tervet önállóan megvalósítja. ... Az egyenessel párhuzamos, illetve merőleges egyenesek szerkesztésében nagy gyakorlottságot mutat, ugyanakkor a szerkesztések menetét önállóan indokolni képes. Felismeri az alapszerkesztések alkalmazhatóságát további szerkesztésekben.	*A szerkesztéses problémák megoldásának útja:* a feladat elemzése — geometriai modell — megoldási terv — szerkesztés — a szerkesztés menetének leírása — bizonyítás — diszkusszió. ...
Minimum: A tanár indirekt irányításával, tárgyi tevékenységre támaszkodva eljut a *kiemelt* geometriai fogalmakhoz. Manipulációval önállóan képes két feltétel szétválasztott, majd együttes figyelembevételére.	
Optimum: Feladatsorozatokkal irányítva eljut a felsorolt mértani helyek fogalmához, a rejtettebb összefüggésekhez. Összetett feladatok megoldása során felismeri az alapszerkesztések alkalmazhatóságát. ... Képes az eszközök önálló kiválasztására, önálló megoldási terv készítésére, végrehajtására, kevésbé bonyolult esetekben a szerkesztés leírására, a megoldás indoklására, diszkutálására. ... Szerkesztési eljárásokat önállóan kidolgoz.	

Óra	Aktuális tananyag	Koncentráció	Tantárgypedagógiai elemzés
57.	Ponttól, illetve egyenestől adott, adottnál kisebb, nagyobb, ... távolságra fekvő pontok halmaza a síkban, illetve a térben (A, B, C). Távolság és irány mérése térképen (A, B, C). Síktól adott távolságra levő pontok halmaza a térben (C). Tk. 219—221., 225—226., 241/**32.**, 242/**38.**, 243/**45.**, 237/**14**—**19.**	A hosszmértékegységek. Egyenes és pont távolsága, egyenesek kölcsönös helyzete. Szakaszmásolás, párhuzamos egyenesek szerkesztése. Rendezési reláció; „nem kisebb", ... Földrajz (térképolvasás).	N.1—N.6., N.8., ..., 0.13., 0.1., 0.3., 0.4., 0.5., 0.8. Heterogén csoportmunka, az eredmények rögzítése frontális munkában. Tárgyi manipuláció, „felfedeztetéses" tanulás. Eszközök: sárgaborsó, hurkapálca, mozaikjáték, Babylon.
58.	Két mértani hely közös részének, egyesítésének megkeresése, megszerkesztése (A, B, C). Szakasz felezőmerőlegesének megkeresése (A), megszerkesztése (B, C). Több mértani hely egyidejű figyelembevétele (C). Tk. 226—229., 231—232., 238/**22.**, 240/**29.**—243/**44.**	Feladatok halmazok közös részének, illetve egyesítésének képzésére. A „vagy", „és" logikai műveletek.	N.1.—N.8., ... 0.1—0.9., 0.13., 0.15. Homogén csoportmunka, esetleg frontális foglalkozás. Tárgyi manipuláció (A), bizonyítások, diszkusszió (B, C). „Ötletbörze".
59.	Két mértani hely egyidejű figyelembevételével, a szakasz felezőmerőleges megkeresésével (A), megszerkesztésével (B, C) megoldható feladatok. Több mértani hely egyidejű figyelembevétele (B, C). Három ponttól egyenlő távolságra levő pont (C). Tk. 229—231., 235—236., 244/**47. 48.**, 240/**29.**—243/**44.**, M. lap 25/**2.**	Hosszmértékegységek átszámítása. Az adatokat tizedes törtekben (A, B, C), illetve veszszős törtek formájában (B, C) adjuk meg. Halmazműveletek gyakorlása.	N.1—N.8., ..., 0.1—0.9, 0.11., 0.15., ... Tárgyi, majd rajzos manipulációra támaszkodó elemzés, tervkészítés (A, B, C), önálló (B, C), illetve tanári irányítással (A) történő szerkesztés, igazolás, diszkusszió. Homogén csoportmunka.
	...	...	...
63.	Tizedes törtek (A, B, C), vesszős törtek (B, C) fogalmát mélyítő feladatok. Nagyság szerinti összehasonlítás, vesszős törtek (B, C), tizedes törtek (A, B, C) körében. ...	Háromszögek, paralelogrammák szerkesztése adott tulajdonságú ponthalmazok segítségével. A háromszög-egyenlőtlenség.	..., N.1., N.3., ..., 0.1—0.6., 0.8—0.10., 0.16. Differenciáltan tervezett egyéni munka. Az adatokat. tizedes, illetve vesszős törtek formájában adjuk meg.
	...	...	...
83.	Grafikonolvasás. Adott tulajdonságú pontok keresése koordináta-rendszerben. A pontoknak megfelelő számpárok leolvasása. Tapasztalati függvények ábrázolása....	Mértani helyek keresése koordináta-rendszerben.	..., N.4., N.6., ..., 0.1—0.5., 0.12. Heterogén csoportmunka. Lyukastábla, mágneses mozaikjáték. Élményalap a függvénytranszformáció későbbi tanításához.

A tanulók munkája	A tanári irányítás	Elemzés
...	...	...
Egy kertész a következő utasításokat kapja: (1) A piros virágokat a szobortól (*S*) 8 méterre kell ültetni! (2) A tulipánokat az emlékműtől (*E*) 5 méterre kell ültetni! A kertész nem emlékszik rá, hogy a szobor és az emlékmű milyen távol van egymástól, ezért különböző terveket készít. Segítsetek neki!	Az alapfeladat írásvetítőn kivetítve. A kérdéseket csoportonként kapják. *Eszközök:* sárgaborsó (néhány pirosra festve); piros kartonból lyukasztóval kivágott korongok.	4-6 fős *homogén csoportok*. N.3., N.4., N.6. *A feladat céljai:* N.1. (problémaérzékenység, rugalmasság); 0.4., 0.15. Piaget interiorizációs elméletének alkalmazása.
Az A csoport kérdései: — A rajzlapokon ketten-ketten rakosgassátok ki a virágokat! — Hová tettétek a piros tulipánokat? — A füzetetekben szerkesszétek meg a tervrajzot! — Hasonlítsátok össze a három tervrajzot! — Van-e másmilyen lehetőség?	*Az A csoportoknál* az egyes rajzlapokon 3, 6, illetve 14 cm az *SE* távolság. *A B, esetleg C csoportok* szükség esetén használják az eszközöket, segítő kérdéseket kapnak. *Diszkusszió* (A, B, C): A megoldás vizsgálata az *SE* távolság függvényében. *További kérdések* (A, B, C) a két ponthalmaz közös részére, egyesítésére vonatkozóan.	*Differenciálás:* a probléma rejtettségében, a tanári irányítás direkt, illetve indirekt voltában, az eszközhasználatban. A feladatban a feltételek határozatlansága lehetővé teszi a divergens gondolkodást. *„Ötletbörze":* (ötletgazdagság, eredetiség, teljesség), N.1., N.3., N.7., N.8., 0.1., 0.9., 0.15., ... *Belső koncentráció.*
A B, C csoport kérdései: — A csoport tagjai különböző lehetőségeket vizsgáljanak! — Hasonlítsátok össze a tervrajzokat! Keressetek érdekes lehetőségeket!		
...	...	...
Szorgalmi feladat (C csoport): Az egyik robot úgy mozog, hogy az A és B állomástól, a másik úgy, hogy a B és C állomástól mindig egyenlő távolságra van. Hol ütközhetnek össze a robotok?	*Diszkusszió:* (C csoport) Az A, B, C pontok egy egyenesbe esnek, nem esnek egy egyenesbe; A és C azonos, ...	*Tartalmi differenciálás* a C csoport fejlettebb képességeit kiaknázva. *Egyéni munka;* a diszkusszió csoportos vitában. N.1., 0.11., 0.16., 0.17.
...	...	...

A tananyaghoz kapcsolódó célok és feladatok további minőségi hierarchizálásakor figyelembe vettük egyrészt a kialakítandó pszichikus képződmények absztrakciós szintjét, a fogalmak egzaktságát, a tevékenységben az indukció és a dedukció arányát, másrészt az ismeretrendszer szilárdsági és alkalmazhatósági fokát, amely a begyakorlottság szintjét mutatja.

A követelmények oszlopában azt fogalmaztuk meg, hogy a *sikeres tanulás eredménye,* a tervezett pszichés tulajdonságok kialakulása, illetve megfelelő fejlettségi szintre jutása hogyan tükröződik a tanulói teljesítményekben.

A tananyagot, a célokat, illetve a követelményeket a [2]-ben leírt taxonomikus modell segítségével elemeztük és rendszereztük. Megjegyezzük továbbá, hogy

a közölt táblázat — helyhiány miatt — rövidített, csupán az elképzeléseink bemutatására és nem a teljességre törekedtünk.

A második táblázatunkban egy olyan tanmenetrészletet mutatunk be, amelyben tükröződik a nevelési, illetve oktatási-képzési célrendszer megvalósíthatósága. A közismert tanmenetekkel szemben, ebben nem elégszünk meg a különböző anyagrészek mozaikszerű egymás mellé rakásával, hanem a célrendszerrel összhangban, az aktuális tananyaghoz kapcsolódva a differenciálás és a koncentráció lehetőségeit, az alkalmazható munkaformákat, módszereket, eszközöket is ismertetjük, esetenként választási lehetőséget is adva a pedagógusnak. Egy konkrét témakör megjelenhet aktuális tananyagként (a ponthalmazok az 57—59. órában), illetve megjelenhet mint belső koncentrációs lehetőség (63., 83. óra). Ez a szemlélet hatékonyabb időkihasználást eredményezhet. Például: Az adott tulajdonságú ponthalmazok témakört a tanterv szerint kb. 10 órában dolgozhatjuk fel. Ezt úgy is megvalósíthatjuk, hogy 9 tanórán az óra kb. 2/3-ában aktuális tananyagként foglalkozunk vele (6 óra), és 12 tanórán az óra kb. 1/3-ában mint belső koncentrációt szerepeltetjük (4 óra). Jól átgondolt feladatsorozattal elérhetjük, hogy a különböző témakörök nem elválasztva, hanem összefüggésükben, egységes rendszerben jelennek meg, így lényegében akár meg is duplázhatjuk az egyes témakörök feldolgozására szánt időt.

A differenciálásra az A, B, C betűk hívják fel a figyelmet, ahol az A a témához nehezen kapcsolódó, a B az átlagos teljesítményt nyújtó, a C a jó tanulók csoportját jelzi. (A célok felsorolása nem teljes, hiszen a koncentráció miatt más témakörök célrendszeréhez is kapcsolódunk. Az N.i. nevelési célokat lásd az [1]-ben, az O.i. oktatási célokat az első táblázatban.) Utolsó táblázatunkban az 58. óra tervezetének két részletével szemléltetjük a differenciált célkitűzés megvalósítását. Az egyes tanulók fejlettségi szintjének optimálisan megfelelő munkatempó, feladat, módszer stb. biztosítja a nevelési, oktatási-képzési feladatok maradéktalan megoldását *minden tanulónál.*

Első olvasásra úgy tűnhet, hogy a hagyományos értelemben vett oktatási cél (két mértani hely közös részének, a szakaszfelező merőlegesnek a megszerkesztése) frontális formában, tanári magyarázattal, majd gyakorlással rövidebb idő alatt elérhető. Ám a tervezetben bemutatott órán, az ismeretekkel egységben, minőségileg magasabb rendű pszichikus tulajdonságokat is fejlesztünk. (A hagyományos változat tantárgypedagógiai elemzését az olvasóra bízzuk!) Ez a példa arra kíván figyelmeztetni, hogy *a matematikai tartalom elsajátítását általában nem elsődleges, és semmiképp sem elkülöníthető célként kell kezelnünk a tervezés során, hanem olyan eszközként, amely segítségével kialakíthatjuk a tartalommal adekvát pszichikus tulajdonságokat* (matematikai jártasságok, problémamegoldó képesség, kreativitás stb.).

IRODALOM

[1] CZEGLÉDY ISTVÁN—DR. HAJDU SÁNDOR: *A nevelés tervezése a matematikaoktatásban.* A Matematika Tanítása 1981/6.

[2] DR. HAJDU SÁNDOR: *Az értelmi cselekvések elemzésének egy modellje a matematikaoktatásban.* A Matematika Tanítása 1982/3.

DR. SURÁNYI JÁNOS
egyetemi tanár
ELTE TTK

Hérón-féle háromszögekről

1. A közelmúltban két cikk foglalkozott e lap hasábjain a Hérón-féle háromszögekkel. Az ezekben szereplő definíciónál látszólag (de be fogjuk látni, hogy csak látszólag) általánosabban Hérón-félének fogjuk nevezni azokat a háromszögeket, amikben az oldalhosszak mérőszáma egész szám, a területe racionális. Primitívnek nevezzük közülük azokat, amelyekben az oldalhosszak mérőszáma relatív prím hármas. Az oldalhosszakat Hérón-féle vagy H-hármasnak, illetve primitív H-hármasnak nevezzük.

Az említett első cikk [3] a geometriai szemléletet követve eljárást írt le a primitív H-hármasok előállítására, míg a második [2] egy paraméteres előállítást adott meg 3 paraméterrel a Hérón-formulára és algebrai azonosságokra építve. Ennél nem látszik, hogyan lehet erre az előállításra rábukkanni.[1]

2. Az alábbiakban a [3] dolgozat gondolatmenetének csekély módosításával 4 paraméteres formulákat adunk meg, amelyek a paraméterek megengedett értékeire megadnak minden primitív H-hármast és mindegyiket csak egyszer. Közben építünk az ún. pütagorászi számhármasokra, röviden P-hármasokra. Így nevezzük az egész oldalú derékszögű háromszögek oldalhosszait, tehát az olyan u, v, w természetes számokat, amelyekre

$$u^2+v^2 = w^2. \tag{1}$$

Ezek közül a primitívekről, tehát azokról, amelyekre u, v, w relatív prímek, tudjuk[2], hogy u és v közül az egyik páros, a másik páratlan, w páratlan és előállíthatók

$$u = 2mn, \quad v = m^2-n^2, \quad w = m^2+n^2 \tag{2}$$

alakban, ahol m és n relatív prím pozitív egész számok, az egyik páros, a másik páratlan és $m>n$.

Megadható azonban ez a hármas[3]

$$u = \frac{1}{2}(m_1^2-n_1^2), \quad v = m_1n_1, \quad w = \frac{1}{2}(m_1^2+n_1^2) \tag{3}$$

alakban is, ahol m_1 és n_1 relatív prím páratlan számok és $m_1>n_1$.

3. Lássuk be először is, hogy a H-háromszögek **1**-ben adott definíciójából következik, hogy a háromszög területe nemcsak racionális, hanem egész szám kell hogy legyen.

Ha a háromszög oldalainak hossza a, b, c, akkor a Hérón-féle összefüggés szerint

---

[1] Még ha előrebocsátjuk is az előállítás alapjául szolgáló $(s-b)+(s-c)=a$, $s(s-c)+(s-a)(s-b)=ab$, $s(s-b)-(s-a)(s-b)=a(s-b)$ összefüggéseket, ezekből is elég önkényesnek tűnő átalakítások vezetnek célra.

[2] Lásd pl. [1] 294—296. oldal!

[3] (3)-at (2)-höz hasonlóan kaphatjuk (1)-ből a páratlan v^2-et fejezve ki, vagy (2)-ből $m_1=m+n$, $n_1=m-n$ helyettesítéssel.

a háromszög t területére

$$(4)\qquad (4t)^2 = (a-b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) =$$
$$= 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

Ha tehát a, b, c egész szám, akkor $T=4t$ négyzete is egész. De racionális szám négyzete csak úgy lehet egész, ha az alap is egész, tehát T egész. Azt kell még belátnunk, hogy osztható 4-gyel. Ehhez nyilvánvalóan elég annyit belátni, hogy a négyzete — s így (4) jobb oldala is — osztható 8-cal.

Tudjuk, hogy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, párosé pedig osztható 4-gyel. A negyedik hatvány első esetben

$$(4k+1)^2 = 8(2k^2+k)+1$$

alakú, tehát 8-cal[4] osztva is 1 maradékot ad, a másodikban pedig osztható 8-cal (16-tal is). Nézzük most $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ maradékát 4-gyel, illetve $a^4+b^4+c^4$ maradékát 8-cal osztva, ha a, b, c mind páratlan, közülük 1, 2, illetve mind a 3 páros. Ezek a maradékok rendre

3 és 3, 1 és 2, 0 és 1, illetve 0 és 0.

Eszerint (4) jobb oldalának a maradéka 8-cal osztva a négy esetben rendre

$$2\cdot 3-3 = 3,\quad 2\cdot 1-2 = 0,\quad 2\cdot 0-1 = -1 \quad \text{és} \quad 2\cdot 0-0 = 0.$$

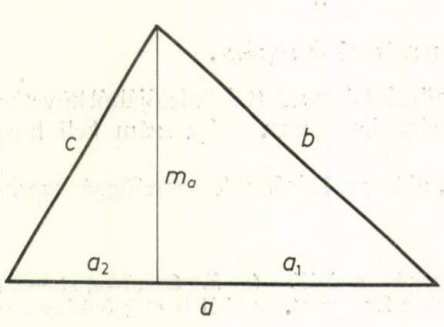
Az első és a harmadik esetben az összeg nem lehet egész szám négyzete, a másodikban és a negyedikben viszont csak 8-cal osztható négyzetszám lehet, és ezt akartuk bizonyítani.

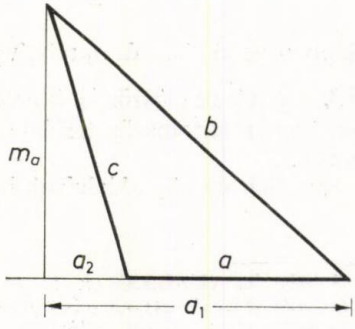
Jegyezzük még meg azt is, hogy a negyedik esetben a háromszög nem primitív. Ezért azt is kaptuk, hogy *primitív H-hármasban két szám páratlan, egy páros.*

4. Ha egy H-háromszöget egy magasságát meghúzva két derékszögű háromszögből származónak tekintünk, akkor a részháromszögek oldalhosszai racionálisak. Valóban, legyen a az az oldal, amelyikre merőleges m_a magasságot húztuk meg (l. ábrát), legyen a és b szöge hegyesszög és a_2 pozitív vagy negatív aszerint, amint a és c hegyes, illetőleg tompaszöget zár be. Ekkor

$$a = a_1+a_2,\quad a_1^2+m_a^2 = b^2,\quad a_2^2+m_a^2 = c^2,$$

tehát $a_1^2-a_2^2=a(a_1-a_2)=b^2-c^2$. Ezért a_1-a_2 is, tehát $a_1=\frac{1}{2}(a+(a_1-a_2))$ és $a_2=$





[4] Könnyű látni azt is, hogy páratlan szám négyzete 8-cal, negyedik hatványa pedig 16-tal osztva is 1 maradékot ad, de erre itt nincs szükségünk.

$=a-a_1$ is racionális szám. Mivel $m_a=2t/a$ nyilván racionális, ezzel állításunkat beláttuk.[5]

Minden racionális oldalú derékszögű háromszög hasonló egy primitív P-háromszöghöz és a hasonlóság aránya racionális szám.

5. A [3] dolgozat a felbontást azzal teszi egyértelművé, hogy a leghosszabb oldalra bocsátott magassággal oszt ketté és ezzel azt is eléri, hogy a részháromszögeket mindig egymáshoz kell illeszteni és nem elhagyni a kisebbet a nagyobból.

Előnyös lehet azonban egy számelméleti jellegű problémánál számelméleti szempontból kitüntetett oldalt választani, esetünkben a páros oldalra merőleges magasságot húzni meg a primitív H-háromszögben, még akkor is, ha ez esetben a részháromszögek egymás mellé illesztése mellett a nagyobból a kisebb elhagyását is tekintetbe kell vennünk. Válasszuk ezt az utat.

Legyen a két primitív P-háromszög, amikhez hasonlókat akarunk összeilleszteni (u_1, v_1, w_1) és (u_2, v_2, w_2). Tudjuk, hogy a w_1, w_2 átfogó-számok páratlanok, a befogó-számok közül legyen u_1 és u_2 páros, v_1 és v_2 páratlan.

Az u_1-nek és v_2-nek megfelelő befogók mentén végezhetjük az összeillesztést, ha az első hármast v_2/D-vel, a másodikat u_1/D-vel szorozzuk, ahol $D=(u_1, v_2)$. D biztosan páratlan szám, mert osztója a páratlan v_2-nek. Ezért a második szorzó páros, az első páratlan. A keletkező H-háromszögnek a két derékszögű háromszög befogóiból keletkező oldala $(v_1v_2/D)+(u_1u_2/D)$ lesz, ami páratlan, mert az első tag páratlan, a második páros. Igaz, hogy H-háromszögünk nem biztos, hogy primitív, de ha nem az, akkor az oldalhosszak legnagyobb közös osztójával való osztással keletkezik belőle primitív háromszög és ez páratlan számból újra csak páratlant eredményezhet.

Ha tehát a páros oldalra merőleges magassággal osztunk ketté egy primitív H-háromszöget, akkor a két derékszögű részháromszög csak úgy illeszkedhet egymáshoz, hogy vagy a primitív P-háromszögek páros befogóiból keletkező befogóik egyenlők, vagy a páratlan befogókból keletkezők.

6. Ha a páros befogó mentén akarjuk összeilleszteni a háromszögeket, akkor célszerű lesz a primitív háromszögek (2) alakú paraméteres előállítását használni, tehát

$$u_1 = 2kl, \quad v_1 = k^2-l^2, \quad w_1 = k^2+l^2,$$

$$u_2 = 2mn, \quad v_2 = m^2-n^2, \quad w_2 = m^2+n^2,$$

ahol a paraméterekre a **2.** pontban szereplő kikötéseknek kell teljesülniük.

Az első hármast mn/D-vel, a másodikat kl/D-vel szorozva, ahol $D=(kl, mn)$, a H-háromszög páratlan befogókból keletkező oldala

$$|(v_1mn/D)+e(v_2kl/D)| = \frac{1}{D_i}|(k^2-l^2)mn+ekl(m^2-n^2)|,$$

ahol $e=1$, vagy $e=-1$ (Az abszolút értékre $e=-1$ esetben lehet szükség, mert bármelyik tag lehet nagyobb abszolút értékű.)

Mivel v_1 és v_2 páratlan, kl/D és mn/D pedig relatív prím, tehát legalább az egyik páratlan, ezért ahhoz, hogy ez az oldal páros legyen, kell, hogy mind a két szorzó páratlan legyen. Tudjuk, hogy k és l, továbbá m és n közül az egyik páros, a másik

[5] Belátható, hogy a_1, a_2 és m_a redukált (tovább nem egyszerűsíthető) alakjában a nevező közös.

páratlan, kl és mn tehát páros. Ha prímfelbontásukban 2 különböző hatványon szerepel, akkor D-ben az előforduló kisebbik kitevőn fog szerepelni, és ezért az egyik szorzó lesz csak páratlan, a másik páros.

7. Ha tehát egy primitív H-háromszöget a páros oldalára merőleges magassággal felosztva ez a magasság a megfelelő primitív P-háromszögek páros befogójából keletkezik, akkor a keletkező két P-háromszög nem tetszőleges, hanem teljesülnie kell annak, hogy páros befogóiknak 2 egyenlő hatványával kell oszthatónak lennie. Mivel k és l, továbbá m és n közül az egyik páratlan, rájuk is teljesülnie kell, hogy a párosak 2-nek egyenlő hatványával oszthatók.

Ha feltételeink teljesülnek, a keletkező két H-háromszög oldalai

$$(5) \qquad \frac{1}{D}\,|(k^2-l^2)mn+ekl(m^2-n^2)|, \quad \frac{1}{D}\,(k^2+l^2)mn, \quad \frac{1}{D}\,kl(m^2+n^2),$$

ahol e vagy 1, vagy -1 $(k, l)=(m, n)=1$, $k+l$ és $m+n$ páratlan[6], továbbá kl és mn 2-nek ugyanakkora hatványával osztható. Ha ezek teljesülnek, akkor a második és a harmadik szám páratlan, ezért ha a hármas nem is primitív, a belőle keletkező primitív hármasban is az első szám lesz páros, a másik kettő páratlan.

A háromszög H-háromszög, hiszen a páros oldalra merőleges magassága $klmn/D$ egész, így a terület is egész szám.

Ha (5)-ben D jelentését úgy módosítjuk, hogy az a három $\frac{1}{D}$-vel szorzott szám legnagyobb közös osztója legyen (ami minden esetre osztható a (kl, mn) legnagyobb közös osztóval), akkor primitív H-hármast kaptunk, amelyiknek az első száma páros.

8. Annak az esetnek a vizsgálatához, mikor a páratlan befogókból keletkező oldal mentén illeszkednek a részháromszögek, a (3) paraméteres előállítást lesz célszerű használni:

$$u_1 = \frac{1}{2}(k^2-l^2), \quad v_1 = kl, \quad w_1 = \frac{1}{2}(k^2+l^2),$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(m^2-n^2), \quad v_2 = mn, \quad w_2 = \frac{1}{2}(m^2+n^2),$$

ahol most mindegyik paraméter páratlan szám. Az első hármast mn/D-vel, a másodikat kl/D-vel szorozva, ahol $D=(kl, mn)$, most mind a két szorzó páratlan. A keletkező két H-háromszög oldalai

$$\frac{1}{2D}\,|(k^2-l^2)mn+e(m^2-n^2)kl|, \quad \frac{1}{2D}\,(k^2+l^2)mn, \quad \frac{1}{2D}\,kl(m^2+n^2).$$

Mivel k^2, l^2, m^2, n^2 mindegyike 4-gyel osztva 1 maradékot ad, D pedig páratlan, mert osztója pl. a páratlan $(1/2)(k^2+l^2)mn$ számnak, ezért most is az első szám páros, a másik kettő páratlan. Ha tehát $2D$-t az $1/(2D)$-vel szorzott három szám D_1 legnagyobb közös osztójával helyettesítjük, akkor alakilag (5)-tel azonos formára jutunk és primitív H-hármast kapunk. Az is teljesül esetünkben is, hogy kl és mn 2-nek ugyanazzal a hatványával osztható (csak 2^0-nal).

[6] Könnyű látni, hogy ha abszolút értéket írunk, akkor a $k>l$, $m>n$ feltétel elhagyható.

9. Ahhoz, hogy a paraméterpárok párjait csak egyszer vegyük tekintetbe, célszerű feltenni, hogy pl.

$$k > m > n, \quad k > l \quad \text{vagy} \quad k = m > l \geqq n. \tag{6}$$

Ezen kikötés mellett különböző paraméternégyesekhez különböző háromszögek tartoznak. Azt fogjuk belátni, hogy a páros oldalon nyugvó szögpárok különbözők.

Egyrészt páros befogók illesztésével keletkezett háromszögek szögpárjai nem egyezhetnek meg egyetlen páratlan befogó mentén történő illesztéssel keletkezett háromszögével sem. Ha megegyeznének, ez azt jelentené, hogy van két primitív P-háromszög, hogy az egyiknek a páros befogó melletti szöge megegyezik a másik páratlan befogó melletti szögével. Ekkor azonban a két háromszög hasonló volna 1-től különböző hasonlósági aránnyal, ami primitív P-háromszögek esetén lehetetlen.

Ha viszont két primitív H-háromszög páros oldalán nyugvó szögek megegyeznek, akkor a két háromszög hasonló. Ezért a magasság meghúzásával keletkező két derékszögű háromszög az egyikben hasonló a másikból keletkező egyik, illetve másik háromszöghöz, és azok mindkét esetben egymás mellé vannak illesztve (két hegyesszög) vagy mindkét esetben a kisebbik a nagyobbikból el van véve (az egyik szög tompa). Ezért a felhasznált primitív P-háromszögpár ugyanaz, ugyanolyan paritású oldalaik mentén vannak összeillesztve, tehát a k, l, m, n négyes is ugyanaz és e értéke is megegyezik.

10. Megjegyzem még, hogy a páros háromszögoldalra adódott kifejezés szorzattá alakítható:

$$(k^2-l^2)mn+ekl(m^2-n^2)=(km-eln)(kn+elm).$$

Azt nyertük tehát, hogy ha k, l, m, n pozitív egész számok, amelyekre

$$(k, l) = (m, n) = 1,$$

kl és mn prímszám-hatványok szorzatára végzett felbontásában 2 kitevője megegyezik,

$$k > m > n, \quad k > l \quad \text{vagy} \quad k = m > l \geqq n.$$

e vagy 1, vagy -1 és D az alábbi kifejezésekben $1/D$-vel szorzott értékek legnagyobb közös osztója, akkor

$$a = \frac{1}{D}|(k^2-l^2)mn+ekl(m^2-n^2)| = \frac{1}{D}|(km-eln)(kn+elm)|,$$

$$b = \frac{1}{D}(k^2+l^2)mn, \qquad c = \frac{1}{D}kl(m^2+n^2)$$

primitív H-hármas, és ilyen alakban minden primitív H-hármast megkapunk pontosan egyszer.

Ha $k=m$ és $l=n$, akkor csak $e=1$ -re adódik háromszög és ez egyenlőszárú.

Megengedhetjük az $m=n$ esetet is, ami valójában csak az 1, 1 paraméterpár megengedését jelenti. Ez esetben a első tagjában az utolsó tényező 0, így csak egy háromszöget kapunk, az derékszögű (3) alakú paraméteres előállításban.

Végezetül alkalmazzuk eredményünket néhány H-hármas előállítására. Mivel a P-háromszögek elég közismertek, ezeket és a belőlük tükrözéssel kapható egyenlő szárú H-háromszögeket elhagyjuk.

k	l	m	n	k^2-l^2	m^2-n^2	k^2+l^2	m^2+n^2	D	a	b	c	t
3	2	2	1	5	3	13	5	2	4 14	15	13	24 84
4	3	4	1	7	15	25	17	4	38 52	25	51	456 624
5	1	3	1	24	8	26	10	2	16 56	25	39	120 420
5	2	2	1	21	3	29	5	2	6 36	25	29	60 360
5	3	3	1	16	8	34	10	6	12 28	25	17	90 210
5	3	5	1	16	24	34	26	10	28 44	17	39	210 330
5	4	4	1	9	15	41	17	4	66 84	85	41	1320 1680
6	1	2	1	35	3	37	5	2	26 44	37	15	156 264
6	5	2	1	11	3	61	5	2	34 56	75	61	1020 1680
6	5	6	1	11	35	61	37	6	164 186	185	61	4520 5580

IRODALOM

[1] GYARMATI EDIT—TURÁN PÁL: *Számelmélet* (egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó, Budapest.

[2] KELEMEN JÓZSEF: *A Hérón-féle háromszögekről*, A Matematika Tanítása, XXVI (1979/6.) 177—182.

[3] VADKERTY TIBOR—HÓDI ENDRE: *A Hérón-féle háromszögekről*, A Matematika Tanítása, XXVI (1979/2.) 44—53.

DR. HORVÁTH MIKLÓS
tudományos munkatárs
ELTE, Budapest

A függvényfogalom néhány jellegzetessége a 17. században

A Matematika Tanítása egy korábbi számában már olvashattunk a függvényfogalom fejlődéséről Galileitől napjainkig. ([1]) Jelen cikkünk e nagy problémakör egy fontos részterületével kíván foglalkozni. Megkísérli bemutatni — elsődleges irodalmi források alapján — Fermat, Descartes, Newton és Leibniz függvényfogalmát.

1. A 16. század végén és a 17. század elején a függvényfogalom fejlődésében nagy szerepet játszott a numerikus matematika lendületes előretörése, valamint az összefüggéseknek — szöveg helyett — betűkkel, szimbólumokkal történő kifejezése. 1591-ben *Viète* bevezette a magánhangzókat az ismeretlen mennyiségek, a mássalhangzókat a konstansok jelölésére. Viète azonban nem használta fel — egyébként komoly hiányosságokat mutató — szimbolizmusát a korai függvényfogalom továbbfejlesztésére. Hiányzott nála a „függvényszerű gondolkodás". ([2], 51. oldal.)

A matematikában és a függvényfogalom tökéletesítésében *Fermat* és *Descartes* munkássága nyitott új fejezetet. Viète algebráját javított formában geometriai problémák megoldására alkalmazták.

Fermat egy 1636-ban írt cikkében, amit először csak 1679-ben tettek közzé

— derékszögű koordináta-rendszert használva — felírta egy egyenes és néhány olyan kúpszelet egyenletét, amelyekkel már — geometriai módszerrel — *Apollóniosz* is foglalkozott Konika című művének VII. könyvében. Fermat ismeretlen mennyiségei változó hosszúságú szakaszok voltak. A függvény analitikus — azaz algebrai eszközöket használó — bevezetésének gondolatát Fermat fenti cikkének alábbi sorai fejezik ki legvilágosabban:

„Valahányszor két ismeretlen mennyiség szerepel egy véges egyenletben, egy mértani helyet kapunk, s a két ismeretlen (szakasz) egyikének végpontja egy egyenest vagy egy görbét ír le." ([3], 91., illetve 85. oldal.)

2. E kérdés részletesebb kifejtését Descartes híres Géométrie című művében találjuk.

Descartes csak olyan görbék analitikus tárgyalásával foglalkozott a Géométrie-ben, amelyek bizonyos csuklós szerkezetekkel is lerajzolhatók. Kijelentette, hogy ezeknek az ún. geometriai (a mai algebrai) görbéknek algebrai egyenlete van. Erről így írt:

„Ezek azok a görbék, amelyek ... szükségképpen egy olyan relációval rendelkeznek egy egyenes minden pontjára vonatkozóan, amely valamely (algebrai) egyenlettel fejezhető ki, mégpedig minden pontra ugyanazon egyenlettel." ([4], 319. oldal.)

Descartes egy keresett mértani hely pontjainak — azaz a lehető legegyszerűbb geometriai görbék metszéspontjaihoz tartozó koordináta-szakaszoknak — a meghatározását algebrai egyenletek (valós) gyökeinek a megszerkesztésére vezette vissza. Módszeréről így írt:

„A keresett mértani hely analitikus feltétele két ismeretlen (x és y) mennyiséget tartalmazó egyenlettel fejezhető ki. Ha az ismeretlenek egyikét tetszés szerint megadjuk, akkor ebből az egyenletből a másik ismeretlent meghatározhatjuk. ... Ha egymás után végtelen sok különböző nagyságú y szakaszt vennénk, végtelen sok x értéket kapnánk. Így végtelen sok (— az adott mértani feltételt kielégítő —) pont állna rendelkezésünkre, ... amelyek felhasználásával a keresett görbét felrajzolhatnánk." ([4], 313. oldal.)

Descartes-nak ez a gondolata első ízben fejezte ki teljesen nyilvánvalóan azt a tényt, hogy egy x és y szakaszokat tartalmazó egyenlet egy függvényt fejez ki ezek között a (geometriai) változók között.

Descartes és Fermat idejében a függvényszerű gondolkodás került előtérbe a problémák matematikai megoldásában. Ezáltal vált lehetővé, hogy analitikus geometriájuk lehetőségeiben messze felülmúlta Apollóniosz módszereit.

A 17. század közepén — *Mengoli, N. Mercator, J. Gregory* és *Newton* munkássága révén — pedig már a Descartes által kizárt — ún. mechanikai görbékkel kifejezett — függvénykapcsolatok analitikus kifejezésére is sor kerülhetett, ti. végtelen sorok segítségével.

3. A függvényfogalom továbbfejlődésének egyik — matematikán belüli — oka az volt, hogy az algebra alkalmazását megpróbálták kiterjeszteni infinitezimális problémák megoldására. Ezen a területen először Newton ért el legnagyobb sikereket. 1671-ben így fogalmazta meg ún. fluxióelméletének alapfogalmait:

„... a továbbiakban az időt nem tekintem formálisan, hanem az ugyanolyan fajta mennyiségekből egyet egyenletes sebességgel növekvőnek tételezek fel, mintha az volna az idő, s az összes többi mennyiséget erre vonatkoztatom. ... A következőkben az időn tehát nem a formálisan tekintett időt kell érteni, hanem azt a mennyiséget, amelynek egyenletes folyásával az időt értelmezzük és mérjük.

Azokat a mennyiségeket, amelyeket határozatlanul növekvőknek tekintek, más mennyiségektől való megkülönböztetésül... a továbbiakban fluenseknek nevezem ... és a v, x, y, z betűkkel jelö-

löm. Sebességeiket pedig, amellyel az őket generáló mozgás következtében folynak, illetve növekednek (nevezhetném ezeket egyszerűen sebességeknek vagy fluxióknak), az l, m, n és r betűkkel jelölöm." ([5], 72. oldal.)

Newton az alábbi két problémára redukálta infinitezimális módszerét:

„Adott fluens mennyiségek egymás közti relációjából határozzuk meg a fluxióik közti kapcsolatot!" ([5], 74. oldal.) Illetve: „Adott egy egyenlet, amely mennyiségek fluxióit tartalmazza, határozzuk meg a mennyiségek egymás közti relációját!" ([5], 82. oldal.)

Newton matematikai analízisének egyik legjellemzőbb vonása a fluensek és fluxiók egymásra épülő hierarchiája. ([6], 440. oldal.) Minden fluxió valamely fluens mennyiség fluxiója, s egyben egy további fluxió fluense. Newton matematikai mennyisége a fluens. A függvényfogalmat Newton számára a fluensek közti reláció fejezte ki.

4. A funkció (functio = függvény) szó matematikai értelemben először *Leibniz* egyik kéziratában szerepelt 1673-ban. ([7]) A functio főnév a latin fungor (fungi, functus sum) igéből származik. Ennek az igének a jelentése: ellát, betölt, elvégez, teljesít valamilyen feladatot. Leibniz említett kéziratában a functio szó jelentésváltozáson ment keresztül.

Először — a szó eredeti jelentése értelmében — Leibniz olyan esetekben használta, amikor egy görbe pontjaihoz tartozó jellegzetes egyenesek vagy szakaszok bizonyos feladatot látnak el („functionem facientes"). Az, hogy egy egyenes érint egy görbét, vagy merőleges rá, vagy egy szakasz pl. a szubtangens (azaz az érintőnek az érintési pont és az x tengellyel alkotott metszéspontja közti szakaszának az x tengelyre vett merőleges vetülete) „szerepét tölti be", egy-egy geometriai feladat.

A kézirat további részében Leibniz már „functiones"-nek („függvények"-nek) nevezte magukat azokat a jellegzetes szakaszokat, amelyek a görbe menetével változnak. Ebben a második értelemben, mint mellékjelentést, a funkció szó implicite tartalmazza valamely szakasznak egy másik — a görbe menetével változó — szakasztól való függésének fogalmát is. (Leibniz azonban ekkor még nem nevezte függvényeknek a koordinátákat.)

A funkció szó 1692-ben jelent meg először nyomtatásban Leibniz egyik dolgozatában ([8], 268. oldal), s a görbe érintőinek, ill. normálisainak egy szakaszát jelentette. Leibniz ebben a cikkében több, ma is használatos kifejezést vezetett be. (Egyenletet differenciálni, konstans, paraméter, koordináták.)

Egy 1693-ban írt tanulmányában a funkció szóval jelölt szakaszok körébe már az x, y koordináták is beletartoztak. ([9], 300. oldal.) Így a továbbiakban egy görbe egyenletét már „két függvény közti reláció"-nak („inter duas functiones") nevezhette. ([10], 306. oldal.)

A függvényfogalom 17. századi továbbfejlődése már Leibniz és a *Bernoulli* testvérek közös munkájának eredménye volt. Ennek során jelent meg a tetszőleges számú x-ből és y-ból alkotott függvény fogalma és jelölése is. ([11], 537. oldal.) Így a 17. század utolsó éveiben — a formulák előtérbe kerülésével — a függvényfogalomnak a geometriai háttértől való elszakadása véglegessé vált.

IRODALOM

[1] DR. KRÁLIK DEZSŐ: *A függvényfogalom fejlődése Galileitől napjainkig.* A Matematika Tanítása, 1980 június, XXVII. évfolyam, 3., 66—75. oldal.

[2] JUSKEVICS, A. P.: *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century.* Archive for History of Exact Sciences, 16. k. 1. szám, 37—85. oldal.

[3] FERMAT, P.: *Ad locos planos et solidos isagoge, Oeuvres de Fermat,* Paris, 1891, I. k., 91—110. oldal, III. k., 85—101. oldal.

[4] DESCARTES, R.: *Discours de la méthode,* Leiden, 1637. E mű 3. függeléke: La Géométrie.
[5] NEWTON, I.: *Tractatus de methodis serierum et fluxionum.* 1671, The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge, 1969, III. k., 32—328. oldal.
[6] VEKERDI L.: *Végtelen sorok és fluxiók.* Az MTA 3. oszt. közl., 1964, 423—441. oldal.
[7] LEIBNIZ, G. W.: *Methodus tangentium inversa seu de functionibus.* 1673 aug. (még publikálatlan kézirat)
[8] LEIBNIZ, G. W.: *De linea ex lineis numero infinitis.* 1692; Leibnizens mathematische Schriften, Halle, 7 k. 1849—1863. (A továbbiakban GM) V. k., 266—268. oldal.
[9] LEIBNIZ, G. W.: *Supplementum geometriae dimensoriae.* 1693.; GM/V. k., 294—301. oldal.
[10] LEIBNIZ, G. W.: *Nova calculi differentialis applicatio et usus.* 1694.; GM/V. k., 301—306. oldal.
[11] *Leibniz levele Johann Bernoullihoz,* 1698 szept.; GM/III$_2$. k., 534—538. oldal.

DR. TAKÁTS ÁGOSTONNÉ
ny. gimnáziumi tanár
Tatabánya

A függvényvonalzó használata a középiskolai matematikaoktatásban

1974 nyarán az OPI által rendezett matematikus szakmai továbbképzésen több városban bemutattuk a kollégáknak az írásvetítő matematikaórákon való felhasználásával kapcsolatban a függvényvonalzó tervét. Igen kevés kivétellel a kartársak úgy nyilatkoztak, hogy „bár már meglenne, hogy az értékes időt ne kelljen sablonok kivágására fordítani, és a füzetekbe rendes ábrák kerülnének".

A függvényvonalzó — sok nehézség leküzdése árán — elkészült, ezért szeretnénk most bemutatni a kartársaknak ezt a — tanítási gyakorlatban remélhetőleg jól használható — rajzeszközt. (Kicsinyített képe az 1. ábrán látható.) Anyaga átlátszó polisztirol. Kapható a PIÉRT és ÁPISZ boltokban.

A függvényvonalzó centiméteres és radiános léptéket tartalmaz*, ezért a szögfüggvények független változóját radiánban, függő változóját pedig centiméterben mérhetjük fel. — Centiméteres léptékben találhatjuk meg az

$x \mapsto x^2$ függvény $[-2; 2]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto 2x^2$ függvény $[-1{,}3; 1{,}3]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto \frac{x^2}{2}$ függvény $[-3; 3]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto x^3$ függvény $[-1{,}5; 1{,}5]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét.

(Ez utóbbinál meg kell említenünk, hogy az első gyártmányokon a $(0; 0)$ pont helyett tévesen $(0; 1)$ szerepelt.)

$x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény $(0; 6]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto 2^x$ függvény $[-2{,}5; 2]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto 3^x$ függvény $[-2; 1{,}5]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

* Vagyis a hosszúságegység mindkét koordinátatengely mentén centiméter.

$x \mapsto 10^x$ függvény $[-2{,}2; 0{,}8]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét.

A vonalzó közepén — külön jelölés nélkül — 1 cm sugarú kör sablonja található. D_f radiánban, R_f centiméterben megadott értékekkel tartalmazza a vonalzó az

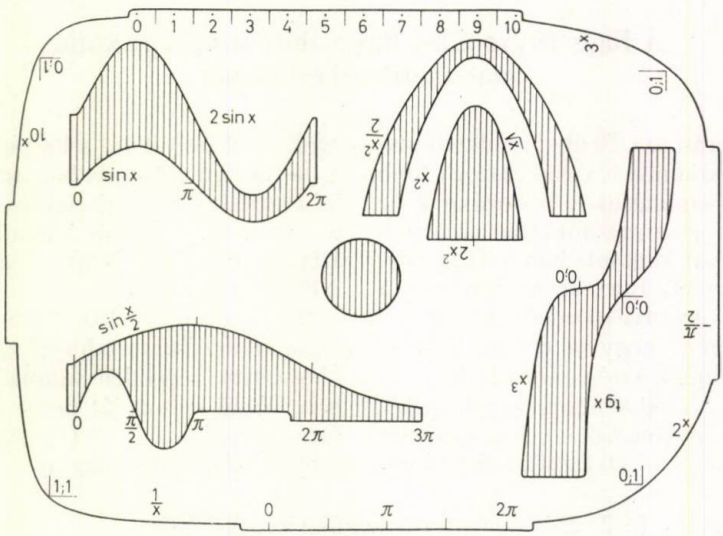
$x \mapsto \sin x$ függvény $[0; 2\pi]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto 2 \sin x$ függvény $[0; 2\pi]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto \sin 2x$ függvény $[0; \pi]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ függvény $[0; 3\pi]$-ra vonatkozó leszűkítésének képét,

$x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$-ra vonatkozó leszűkítésének képét.



1. ábra

Hangsúlyozzuk, hogy függvényvonalzónk rajzeszköz, tehát nem pótolja a gondos függvényelemző magyarázatot. Nem is tudja használni az a tanuló, aki nincs tisztában a függvények jellemző tulajdonságaival. A vonalzó pontos elhelyezéséhez pedig 3—3 pont ordinátáját ki kell számítani.

A függvénygörbéknél feltüntetett illesztési pontokat értelemszerűen kell használni:

Az $\frac{1}{x}$ függvénygörbe $(1; 1)$ illesztési pontja nyilván az $x > 0$ esetre vonatkozik. Az $x < 0$ ág megrajzolásánál ez az illesztési pont a koordináta-rendszer $(-1; -1)$ pontjához kerül.

A 2^x, 3^x, 10^x függvények képénél a $(0; 1)$ illesztési pont érvényben marad akkor is, amikor a vonalzót térben „visszájára" fordítjuk, hogy az $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x \mapsto \left(\frac{1}{10}\right)^x$ függvények képét ábrázolhassuk vele.

Az $x \mapsto -2^x$ stb. függvények ábrázolá-

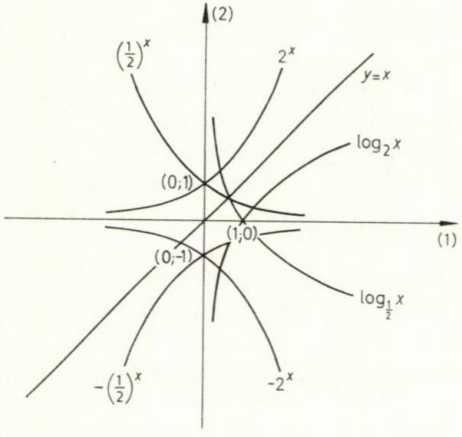
sánál viszont az illesztési pont értelemszerűen a koordináta-rendszer $(0; -1)$ pontja lesz.

Jól érzékelteti az exponenciális és logaritmusfüggvények inverz kapcsolatát, hogy például ugyanazzal a vonalzóval rajzoljuk az $e: x \mapsto 2^x$ képét, mint az $f: x \mapsto \log_2 x$ képét, ahol

$$D_e = \mathbf{R} = R_f,$$

$$R_e = \mathbf{R}^+ = D_f.$$

Az e és f képe az $y=x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei egymásnak. Az f függvény esetén az illesztési pont — az inverz kapcsolatnak megfelelően — a koordináta-rendszer $(1; 0)$ pontja lesz (2. ábra szerint).



2. ábra

Az $x \mapsto \sin x$ függvény görbéje egyben az $x \mapsto \cos x$ függvény ábrázolására is szolgál, jól érzékeltetve a $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ kapcsolatot. Ennek megfelelően a $\sin x$ vonalzórészen levő „0" a $\cos x$ ábrázolásakor az abszcisszatengely $-\frac{\pi}{2}$ helyéhez kerül. Az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvény képét a $\operatorname{tg} x$ vonalzórésszel rajzoljuk, a vonalzót térben elforgatva. A $(0; 0)$ illesztési pont ekkor a koordináta-rendszer $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ pontjába kerül.

Az x^2 függvény képének megfelelő vonalzórésznél a szimmetriatengely vonala van bejelölve. Az

$$f: \{x \in \mathbf{R} | x \geqq 0\} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x},$$

$$g: \{x \in \mathbf{R} | x \geqq 0\} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2$$

esetben f és g egymás inverze, tehát grafikonjuk az $y=x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei egymásnak. Ekkor az x^2 függvény képének megfelelő vonalzórész szimmetriatengely vonala az (1) tengelyre kerül.

Vonalzónknak különösen jó hasznát vehetjük a függvény-transzformációk tanításánál. Az eltolások, tükrözések sokkal szemléletesebbé válnak a tanulók számára, amikor a függvény képének egészében való elmozgatását látják a függvényvonalzó segítségével. Például az $y=ax^2 \mapsto y=a(x-u)^2+v$ transzformáció esetén az $(u; v)$ vektorral való eltolást, vagy például az $y=x^2 \mapsto y=-x^2$ transzformációnál az (1) tengelyre vonatkozó tükrözést stb.

Összefoglaló ismétlésnél, a függvények adott szempontok szerinti csoportosításánál áttekinthető, jól közelítő pontosságú ábrasorok kerülhetnek a tanulók füzetébe a függvényvonalzó segítségével. Például növekedő függvények; szélsőértékkel rendelkező függvények; invertálható függvények stb.

Reméljük, hogy a kartársak szívesen és megértéssel fogadják ezt a rajzeszközt és eredményesen tudják alkalmazni oktató munkájukban.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár
Budapest

Matematikus vándorgyűlés Kecskeméten

A Bolyai János Matematikai Társulat a sorrendben 22. RÁTZ LÁSZLÓ vándorgyűlést 1982. július 6-tól 9-ig rendezte meg több, mint 400 résztvevővel.

A vándorgyűlést *Kővári Károly*, a BJMT alelnöke nyitotta meg, majd *Fischer István*, Kecskemét város Tanácsának elnöke üdvözölte a vándorgyűlés résztvevőit. Ezután Balla Tibor színművész Juhász Gyula Himnusz az emberhez című költeményét, majd a kecskeméti zenetanárokból alakult trió Kodály Zoltán Vonósszerenádjának első tételét adta elő.

Ezután *Reményi Gusztávné*, a Beke Manó Emlékdíj Bizottság titkára ismertette a bizottság határozatát.

A matematika oktatása és népszerűsítése érdekében végzett kimagasló munkájáért 1982-ben a Beke Manó Emlékdíj első fokozatában részesült
DR. NEMETZ TIBOR, az MTA Matematikai Kutató Intézetének munkatársa.

Az emlékdíj második fokozatában a következő tagtársak részesültek:

BEDE ISTVÁN, szakközépiskolai szakfelügyelő, Tatabánya,
FÁBOS LÁSZLÓNÉ, a budapesti Lisznyai u. Általános Iskola tanára,
LAJOS JÓZSEFNÉ, a szigetszentmiklósi 3. sz. Általános Iskola tanára,
DR. SÁRKÁNY ERNŐ, a kecskeméti Katona József Gimnázium tanára,
STROHMAJER JÁNOS, az ELTE TTK Geometria Tanszékének adjunktusa.

Az emlékdíjakat *Kővári Károly*, a BJMT alelnöke adta át.

Az emlékdíjak átadása után került sor a matematikatanárok 1981. évi feladatmegoldó versenye eredményének ismertetésére és az oklevelek átadására. A verseny eredményét lapunk ez évi 3. számában közöltük.

A délelőtti plenáris ülésen RÉVÉSZ PÁL *Majdnem determinisztikus véletlen sorozatok* című előadása hangzott el.

A vándorgyűlés résztvevői a következő napokban öt szekcióban folytattak tanácskozást. Több előadás több szekció közös rendezvénye volt. Az egyes szekciókban a következő előadások hangzottak el:

ALSÓ TAGOZATOS SZEKCIÓ

Ill Mártonné—Csiba Gyuláné—Váradi Lajosné—Varga Györgyné—Király Sándorné: Hányféle? Hányféleképpen? Kombinatorika az alsó tagozaton.
Oravetz Pálné: Feladatgyűjtemény az 1. és a 2. osztályban.
C. Reményi Eszter: Feladatok a 4. osztályos tananyag és követelmények értelmezéséhez.
Polyhosné Babácsek Erzsébet—Tompa Klára: Diasorozat a 4. osztályos matematikaanyag feldolgozásához. (A felső tagozatos szekcióval közösen.)
Márton Klára: Matematika az óvodában.
Halmos Istvánné: Játék? Számolás?

FELSŐ TAGOZATOS SZEKCIÓ

Pósa Lajos: Matematikai játékok I. (A középiskolai A és B szekcióval közösen.)
Pogáts Ferenc: Mozaikok és parketták.
Vörös György: Beszámoló egy felmérésről.
Novák Lászlóné: Az 5. osztályos követelmények teljesítésének feltételei a tananyagban.
Pósa Lajos: Matematikai játékok II. (A középiskolai A és B szekcióval közösen.)
Vándor Sándorné: Szabályos testek.
Urbán János: Mit nyújtanak az általános iskolák, mit várnak a középiskolák? (A középiskolai A és B szekcióval közösen.)

KÖZÉPISKOLAI SZEKCIÓ

A. SZAKKÖZÉPISKOLA

Herczeg János: Ankét a szakközépiskolai matematikatanításról.
Török Turul: Mi előreléptünk a számítógép használatával (A B szekcióval közösen.)
Koller Lászlóné: A szakmunkásképző intézetekben folyó matematikaoktatás időszerű kérdései.

B. GIMNÁZIUM

Laczkovich Miklós: Az 1981. évi tanárverseny feladatmegoldásairól.
Csirmaz László: Az 1982. évi tanárversenyről.
Kántor Sándor: Mikor tekintsük jónak egy versenyfeladat megoldását? Ankét a középiskolai matematikaversenyekről. (A felsőoktatási szekcióval közösen.)
Andrásfai Béla (vitavezető): Ankét az új felvételi rendszerről. (Az A és a felsőoktatási szekcióval közösen.)
Varecza Árpád: Keresési problémák.
Kálmán Attila: Axiomatizálás a középiskolában.

A tanórán kívüli matematikai nevelés külföldön című előadássorozat keretében az idén Budapesten megrendezésre került Nemzetközi Matematikai Diákolimpián részt vevő delegációk három vezetője:
Szekeres György (Ausztrália), *Thomas Mühlgassner* (Ausztria) és *Ion Cuculescu* (Románia) ismertette a hazájában e téren tett erőfeszítéseket és válaszolt a nagyon sok feltett kérdésre. Hasonló beszámolót tartott *Petko Ardunov* bolgár matematikus is. (A felsőoktatási szekcióval közösen.)

FELSŐOKTATÁSI SZEKCIÓ

Scharnitzky Viktor—Szentes Ottokár—Tálosi Istvánné: Mit várok az egységes műszaki főiskolai tankönyvtől?
Vincze Endre: Az egységes főiskolai tankönyvpályázatról.

Az előadásokat mindenütt élénk vita követte, és számos helyen egymásnak ellentmondó vélemények csaptak össze. Az előadások szünetében és a szabad időben beszélgetésekre és termékeny eszmecserékre került sor.
A vándorgyűlés résztvevői sok, az oktatásban felhasználható írásos anyagot is kaptak, többek között az Útközben című időszakos kiadvány 1982. évi 1. és 2. számát, az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny idei feladatait és megoldásukat, a felvételi vizsgák feladatait és azok megoldásait.

A szakmai rendezvényeken túl a vendéglátók és a szervezők számos szórakoztató programról is gondoskodtak. A vándorgyűlés résztvevői meghallgathattak két Kodály-hangversenyt, választhattak háromféle kirándulás közül (Bugac, Kalocsa, Kecskemét művészeti alkotóműhelyei). Megtekinthették Petko Ardunov Bulgáriát bemutató filmjét és végül kitűnően szórakozhattak (és táncolhattak) a jól sikerült állófogadáson. A gördülékeny szervezés és a jó ellátás ugyancsak kellemes emlékeket hagyott a résztvevőkben.

Az 1983. évi vándorgyűlést előreláthatólag Szegeden rendezi meg a Bolyai János Matematikai Társulat.

DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

A szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának helyzete, problémái és fejlesztésének lehetőségei*

A szakmunkásképzés matematikaoktatásának fejlődése folyamat, ezért a jelenlegi helyzet megértéséhez és tárgyilagos értékeléséhez ismernünk kell az előzményeket.

1969-ben a Szakmunkás Törvény a Művelődési Minisztérium hatáskörébe utalta a közismereti tárgyak gondozását. Az Országos Pedagógiai Intézet csak ez után, 1971-ben kezdett a szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásával foglalkozni.

Akkor a szakmunkásképzésben lényegében kétféle tanterv szerint folyt a matematika tanítása. Volt egy B-tagozatos (ún. emeltszintű) tanterv a matematikaigényesebb szakmák számára és egy A-tagozatos (ún. hagyományos), mely nem lépett túl az általános iskolai tananyagon, helyenként el sem érte azt.

A kétféle képzés problémái hamar jelentkeztek. Az emeltszintű képzés nehéznek bizonyult. Ennek oka részint a szakmunkásképzőbe kerülő gyenge előképzettségű tanulókban kereshető, de az is tény, hogy a tanárok felkészültsége is (akkoriban még igen sok képesítés nélküli vagy más szakos pedagógus tanított matematikát) akadályozta az eredményes munkát.

A fokozódó nehézségek miatt a Munkaügyi Minisztérium az 1971—72. tanévben széles körű vizsgálatot végzett, hogy mely matematikai témákat tanítsunk a matematika tantárgy keretein belül, melyeket esetleg más tantárgy keretében (pl. a geometriai szerkesztéseket szakrajzban) és mely anyagrészeket hagyjunk el teljesen.

Ezzel egy időben (1972-ben) az Országos Pedagógiai Intézet Matematika Tanszéke kísérletet indított, amelynek célja a szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának korszerűsítése volt.

A kísérlet alapelvei, módszertani elképzelései megegyeztek az általános iskolákban folyó komplex matematikaoktatási kísérlet alapelveivel és elképzeléseivel. Ez a kísérlet képezte alapját a ma már bevezetett általános iskolai új tantervnek.

A közoktatáspolitikai párthatározat

* Az OPI Matematika Tantárgyi Bizottságának 1982. május 20-án tartott ülésén elhangzott beszámoló.

(1972-ben) kimondta, hogy egységes közművelődési anyagot kell nyújtani minden szakmunkástanulónak.

Ez a határozat végre állást foglalt amellett, hogy a matematika az általános műveltség része és ezért nem csak az az egyetlen feladata, hogy a szakmai feladatok helyes elvégzésére készítse fel a tanulókat.

A párthatározat végrehajtásaként az OPI feladatul kapta, hogy 1975-re új, egységes matematika tantervet készítsen a szakmunkásképző iskolák számára.

A munkálatok 1974-ben kezdődtek. A kísérletről még csak két év tapasztalatai álltak rendelkezésünkre, és ez elég kevés idő végleges következtetések levonására.

Két dolog azonban már akkorra is világossá vált:

— A szakmunkásképzőbe készülő ún. gyenge tanulóknak nem a képességeik, hanem az előképzettségük gyengébb, mint a hasonló korú, más iskolatípusba jelentkező társaiké.

— Ebben az iskolatípusban is lehet korszerűen tanítani a matematikát, az általános iskolában már kipróbált komplex módszerek itt is eredményesebbé teszik az oktatást.

A kísérlet tapasztalatai mellett még hasznos információt jelentettek számunkra a Munkaügyi Minisztérium már említett vizsgálatának és méréseinek eredményei.

Mindezeket figyelembe véve készült el az 1975-ös, ideiglenes tanterv. Ebben három tantervi változat szerepelt. Egy a 3 éves, egy a 2 éves képzés számára és egy szintén három évre szóló, a Belkereskedelmi Minisztérium iskolái számára. Ez az egyes témák tárgyalásának sorrendjében kissé eltért a másik 3 éves tantervtől.

Mindhárom tantervi változat lényegében azonos törzsanyagot tartalmazott. 1977-ben került bevezetésre a jelenleg is érvényben levő tanterv, amely tartalmában alig tér el az 1975-ös tantervtől, de ez már nem tartalmazza a Belkereskedelmi Minisztérium kérésére készült tantervi változatot.

1977-re elkészültek az új tankönyvek, munkalapok és módszertani útmutatók is. Tulajdonképpen ezek töltik meg új tartalommal a meglehetősen szűkszavú tantervet.

Az új dokumentumok fogadtatása kedvező volt. Ennek oka többek közt az volt, hogy kísérletünkről rendszeresen tájékoztattuk a szakfelügyelőket (a kísérleti anyagból mindig küldtünk egy-egy példányt a szakfelügyelőknek), akik ezért már a dokumentumok bevezetése előtt két évvel folyamatosan megismerkedhettek az új dokumentumok szemléletével és ennek alapján fel tudták készíteni a tanárokat is.

Az új dokumentumok beválásával kapcsolatos első átfogó vizsgálatot 1979-ben végeztük. Az összegyűjtött adatok és vélemények azt mutatták, hogy a tanárok megértették és elfogadták az új dokumentumokat és igyekeznek ezek szellemében folytatni oktató munkájukat.

A vizsgálat keretében végzett tudásszint mérés eredményei is igen biztatóak voltak.

Feltűnően jobbak voltak az eredmények az előző évekhez képest a függvényfogalom elsajátítása, az egyenletek, egyenlőtlenségek és a szöveges feladatok egyenlettel történő megoldása terén.

A vizsgálatokról a Szakmunkásnevelés című folyóiratban (1979. 6. sz. 11—13. p.) részletes tájékoztatás jelent meg.

A dokumentumokhoz folyamatosan kísérleti követelményrendszert is dolgoztunk ki. Ezt mértük is minden évfolyamon, két egymás után következő évben közel 20 osztályban.

Az első és másodéves követelmények és mérési eredményeik a Matematika Tanítása 1979. 5/139; 1980. 1/4; 1981. 4/102; 1982. 1/9 számában jelentek meg. A harmadéves követelmények mérési eredményeit előreláthatóan még 1982. őszén ugyanitt közöljük.

A dokumentumokról kialakult vélemény ma is — öt évvel a bevezetés

után — meglehetősen pozitív. (Lásd: Pedagógiai Szemle 1982. évi 4. szám!)

1982—83-ban, tehát az idén először, csak olyan tanulók jönnek a szakmunkásképzésbe, akik az általános iskola 5. osztályától kezdve már új matematika tanterv szerint tanultak.

Ez azonban számunkra nem tesz szükségessé nagyobb korrekciót, hiszen a jelenlegi szakmunkás tanterv készítésekor ismertük az általános iskolának ezt az új (ún. ideiglenes) tantervét, és ezzel összhangban készítettük el a mi tantervünket.

Természetesen bizonyos témakörök, amelyeket eddig új anyagként tanítottunk (hiszen az általános iskolai tantervre még nem támaszkodhattunk, csak szemléletével azonosulhattunk), most ismétlésként kerülnek tárgyalásra. Ilyen például a Pithagorasz-tétel és a függvények. A felszabaduló időt arra fordítjuk, hogy bizonyos témákat (számrendszerek, kombinatorika, egyenlőtlenségrendszerek, sorozatok), amelyeket a tanulók az általános iskolában tanultak és a mi tantervünkben nem szerepelnek, szinten tartjuk. Erre a célra készültek a kiegészítő munkalapok és módszertani útmutatók.

A munkalapok feladatanyagának összeállításakor figyelembe vettük a meglevő dokumentumok olyan hiányosságait is, amelyeket a több éves gyakorlat tárt fel (pl. ponthalmazokra, geometriai transzformációkra vonatkozó feladatokat alig tartalmaznak a jelenleg használt dokumentumok). Ugyancsak igyekeztünk a fizikai és a szakmai tantárgyak később (tehát az 1977-es tanterv után) bevezetett új tanterveinek igényeit is kielégíteni.

Így kerültek a munkalapokra a vektorokkal kapcsolatos és a másodfokú egyenlet grafikus megoldására vezető feladatok, valamint a hatványozás definíciójának ismeretében megoldható egyszerűbb exponenciális egyenletek.

A kiegészítő munkalapok és a hozzájuk készült módszertani útmutatók várhatóan az 1983—84. tanévre kerülnek az iskolákba.

Évek óta égető probléma a korszerű, a szakma igényeit is kielégítő feladatgyűjtemény hiánya.

Ezért több éves előkészítő munka után végre készül a 14 füzetből álló matematikai példatár, amely az egyes nagyobb szakmacsoportok igényeit is szem előtt tartja.

Ez a feladatgyűjtemény arra ad lehetőséget, hogy az egyes matematikai témakörök tanításakor a tanulók a szakmájukhoz kapcsolódó feladatokon alkalmazhassák a tanult ismereteket. Tehát nem szakmai példatárat készítettünk — ez nem a mi feladatunk. Feladatgyűjteményünk célja nem a szükséges szakmai számítások, hanem a matematikai ismeretek elsajátíttatása és ezek alkalmazása egyes szakmai számításokban.

A feladatgyűjtemény várhatóan 1984-ben jelenik meg. Benne nemcsak a jelenlegi tanterv témaköreihez kapcsolódó feladatokat találunk. Az általános iskolai reform felfutásából adódó korrekciókra gondolva helyet kapnak benne vektorokra, kombinatorikára, másodfokú egyenletekre vonatkozó feladatok is.

Az általános iskolai új dokumentumokban a függvények jelölése eltér a régebbi, a mi általunk is használt jelölésektől. Ez nem pusztán jelölésbeli kérdés. A függvény értelmezése változott meg némiképpen és ez hozta létre az új szimbolikát.

A Tankönyvkiadóval egyetértésben úgy tervezzük, hogy a szakmunkás matematika tankönyvek utánnyomásakor a függvény definícióját megfelelően átfogalmazzuk és a jelöléseket átjavítjuk (pl. az $y=ax+b$ lineáris függvényt $x \mapsto ax+b$ alakra).

Az eddigiekben olyan problémákról szóltunk, amelyek megoldása már folyamatban van.

Vannak azonban olyanok is, amelyek még megoldásra várnak.

Az első éppen egy helyes elv helytelen

vagy talán inkább nagyon leegyszerűsített értelmezéséből adódik.

A közoktatáspolitikai párthatározat kimondta, hogy egységes közművelődési anyagot kell biztosítani minden szakmunkástanuló számára.

Az elv nyilvánvalóan helyes, de ez nem jelenti azt, hogy feltétlenül azonos matematika tantervet kell előírni minden szakma számára.

A szakmunkásképzésben is ugyanúgy több tantervi változatra lenne szükség, mint a szakközépiskolában.

Például a vasas szakmában a tanulóknak már az első évfolyamon szükségük van a szakmai számítások elvégzéséhez a Pithagorasz-tételre és a szögfüggvényekre. Ezért ez a két téma az elsős anyagban szerepel. Egy vendéglátóipari vagy egy fodrásztanuló ezeket az ismereteket a szakmájában közvetlenül nem alkalmazza, viszont szüksége volna már az első évben magasabb szintet elérnie bizonyos numerikus számításokban, algebrai átalakításokban.

A Pithagorasz-tételt és a szögfüggvényeket minden szakmunkástanulónak ismernie kell, mert ez hozzátartozik az általános műveltséghez, de azt már a szakmának kellene megszabnia, hogy melyik évfolyamon és milyen mélységben foglalkozzanak vele.

Változatlanul nagy problémát jelent ebben az iskolatípusban a tanulók gyenge előképzettsége. És itt nemcsak a matematikai, hanem az anyanyelvi alapkészségek hiányára is gondolunk. Ez utóbbi majdnem annyi problémát jelent matematikaórán, mint a megfelelő matematikai előképzettség hiánya.

Ezen csak az általános iskolával való szorosabb együttműködés segíthet. A differenciált foglalkoztatás erősítése, a gyengébb tanulóknak a színvonaluknak megfelelő, az alapkészségeket fejlesztő foglalkoztatása mind a két iskolatípusban.

Nem hallgathatjuk el azt sem, hogy bár a szakmunkásképzésben tanító tanárok szakmai felkészültsége és módszertani kultúrája az utóbbi időben igen sokat fejlődött, általánosságban még mindig kissé alacsonyabb szinten áll, mint a többi iskolatípusban tanító tanároké. Ennek oka elsősorban az, hogy ebben az iskolatípusban nagyon nehéz még kis eredményt is elérni. Sok ambiciózus tanár ezért elfárad és idővel kedvét veszti vagy más iskolatípusba megy, ahol látványosabb eredményeket lehet elérni.

Súlyosbítja a helyzetet, hogy a tanárképzés a mai napig sem figyelt fel a szakmunkásképzésre, pedig a főiskolákon, ill. az egyetemen végző matematika szakos tanárok jelentős része ebben az iskolatípusban helyezkedik el. A tanárjelölteket egyáltalán nem készítik fel a szakmunkásképző iskolákban rájuk váró feladatokra, ezért sok pályakezdő már az első években megfutamodik.

A tanárok szervezett továbbképzése sem megoldott. Változó színvonalon folyik az egyes megyékben. Ezen ugyan sokat lendített, hogy most már minden megyében van olyan matematika szakfelügyelő, aki a szakmunkásképző iskolákat (vagy azokat is) látogatja és továbbképzésüket tartalmilag irányítja.

Változatlan probléma azonban továbbra is a felügyelők nagymértékű túlterhelése.

Az elmondottak alapján a következőképpen összegezhetjük a jövőre vonatkozó elképzeléseinket:

— Az általános iskolával való hatékonyabb együttműködést fejlesztenünk kell,

— a tanárképzésben a szakmunkásképző iskolákban folyó munkára is fel kell készíteni a hallgatókat,

— rendszeresebbé és hatékonyabbá kell tenni a szakmunkásképzőben tanító tanárok továbbképzését is,

— több változatú, ezáltal a szakmák igényeit jobban szem előtt tartó terveket kell készíteni a nyolcvanas évek végére (ekkorra fut fel teljesen az általános iskolai reform),

— ennek érdekében folytatni kell a

korszerűsítési kísérletet, melynek célja a tantervi korrekciók és az esetleges új dokumentumok kimunkálása.

A kísérleteket ki kell terjeszteni a következőkre is: zsebszámológépek alkalmazása az oktatásban és a számítástechnika elemeinek tanítása a szakmunkásképzésben. Ezek nélkül ugyanis ebben az iskolatípusban sem beszélhetünk korszerű matematikaoktatásról.

A szakmunkásképzés matematikaoktatásáról adott kép nem lenne teljes, ha nem szólnánk pár szót a versenyekről.

A szakmunkástanulók tanulmányi versenyein a mai napig a területi elv érvényesült, vagyis a megyei verseny első helyezettje került az országos döntőbe, függetlenül attól, hogy a megyei versenyen nyújtott teljesítménye messze alatta maradt egy másik megye esetleg ötödik-hatodik helyezettjének teljesítménye alatt is.

Kérésünkre az 1981—82. tanévben a Művelődési Minisztérium engedélyezte, hogy kísérletképpen változtassunk ezen az egy megye — egy gyerek elven. A megyei döntőhöz eddig is központi feladatanyagot és pontozási útmutatót adtunk. Most meghatároztunk egy bizonyos pontszámot is és bekértük azoknak a tanulóknak a dolgozatát, akik elérték (vagy túlhaladták) ezt a pontszámot. A versenybizottság ezeknek a dolgozatoknak alapján állította össze az országos döntőn részt vevők névsorát.

A tapasztalatok azt mutatták, hogy a versenynek ez a formája bevált, ezért szeretnénk a jövőben is ezt a gyakorlatot követni.

Végezetül csak annyit szeretnénk megjegyezni, hogy igyekeztünk reális képet adni a szakmunkásképzés matematikaoktatásáról. Nyíltan beszélni a hibákról és problémákról is, ezt kívánja az ügy érdeke, enélkül lehetetlen továbblépni és a ránk váró feladatoknak megfelelni.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10. II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1011. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$x+y+z = 1$$

$$x^3+y^3+z^3 = 1$$

$$xyz = -16$$

Borsovszky Rudolf, Budapest

1012. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1A_2\ldots A_{2n}$ konvex sokszögben fennáll a

$$k \geqq \sum_{i=1}^{n} A_iA_{n+i} \sin \varphi_i$$

reláció, ahol k a sokszög kerülete, φ_i pedig az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ átlók szöge!

Pataki János, Szatmár

1013. Az $a_n=n^2+an+b$ (a, b adott egész számok) sorozatok közül határozzuk meg azokat, amelyeknek végtelen sok olyan tagja van, amely előállítható másik két tag szorzataként!

Giczi Margit, Sümeg

1014. Ketten felváltva úgy húznak páratlan sok golyóból tetszés szerinti (pozitív egész) számú golyót, hogy minden húzáskor legfeljebb az eredeti golyószám felét veszik el. A játékot az nyeri, akinek — a golyók fogytával — páros sok golyója van. Van-e valamelyik játékosnak nyerőstratégiája?

Bogdán Zoltán, Cegléd

1015. Bizonyítsuk be, hogy a tér egész koordinátájú pontjai közül kiválasztható négy pont úgy, hogy ezek a pontok egy szabályos tetraéder csúcsai legyenek!

Határozzuk meg a legkisebb térfogatú ilyen tetraéder élhosszát!

Bartha Gábor, Szentendre

1016. Tekintsük az

$$f(x)f(y) \leqq f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

relációnak eleget tevő, konstanstól különböző, valós együtthatós polinomfüggvények H halmazát! Bizonyítsuk be, hogy H minden elemének ugyanannyi valós zérushelye van!

Bartha Gábor, Szentendre

FELADADATMEGOLDÁSOK (987—992.)

987. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre egy 10-nél nem kisebb szám négyzete végződhet?

Megoldás: A **976.** számú feladatban beláttuk, hogy egy páratlan szám négyzetének utolsó három jegyét az alábbi táblázat adja:

százas	tízes	egyes
0, 2, 4, 6, 8	0 4 8	1 9
1, 3, 5, 7, 9	2 6	1 9
0, 2, 6	2	5

A táblázat első két sorában állók számtani sorozatba rendezhetők. A szokásos jelölésekkel: a_1 az első, a_n az utolsó tag, d a különbség:

a_1	a_n	d
001	961	40
009	969	40

Belátjuk, hogy páros számok négyzetének utolsó három jegye, ha a szám 10 többszöröse: 000, 100, 400, 500, 600, 900; a további esetekhez tartozók pedig az előbbihez hasonlóan két számtani sorozatba rendezhetők:

a_1	a_n	d
004	984	20
016	996	20

A 10 többszöröseire vonatkozó állítás nyilvánvaló.
Elegendő az 1000-nél kisebb számok négyzetét vizsgálni, mivel

$$(1000z+y)^2 = 10^6z^2+2000yz+y^2$$

miatt y^2 adja az utolsó három jegyet.
Legyen

$$y = 100a+10b+2k \quad \text{és} \quad 1 \leqq k \leqq 4.$$

Ekkor y^2 utolsó három jegyét a

(1) $$100b^2+40k(10a+b)+4k^2$$

kifejezés utolsó három jegye adja.
Ha most $k=2$ vagy 3, akkor (1)-ből

(1a) $100b^2+80(10a+b)+16$, illetve

(1b) $100b^2+120(10a+b)+36$.

Mindkét formulánkból azonnal látható, hogy a tízesek száma bármelyik páratlan szám lehet, és ez egyedül a b választásától függ. Ugyanis a tízesek számát az első esetben a $80b+16$, a második esetben pedig a $20b+36$ tag határozza meg. Megjegyezzük, hogy valamennyi esetben b helyébe (az egyjegyű) $(b+5)$-öt vagy $(b-5)$-öt írva ugyanarra a két jegyre végződő számot kapjuk. Azt kell még igazoljuk, hogy a százasok száma — a szóba jövő utolsó két jegy rögzítése mellett — bármelyik (egyjegyű) szám lehet.

Az a jegy alkalmas változtatása mind (1a)-ban, mind (1b)-ben a százas jegyek számát páros számmal növeli (csökkenti). Bármelyik formulánkban b helyébe az egyjegyű $(b+5)$- vagy $(b-5)$-öt írva, a százasok száma mindkét esetben páratlan számmal nő vagy csökken, az utolsó két jegy pedig nem változik. Ezek szerint igaz a százasok jegyéről szóló állításunk.

A $k=1$ vagy 4 eseteket előbbivel azonos módon igazolhatjuk. Megjegyezzük még, hogy (1a) és (1b) formulákból adódhat ugyanarra a háromjegyű számra végződő egész. Például 236-ra végződőt ad az $a=3$, $b=9$, illetve az $a=1$, $b=0$ választás.

Szánthó Gyula, Gyula, megoldása alapján

A megoldók száma: 6.

988. Legyen a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív valós számok egy permutációja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és c pozitív szám. Igazoljuk, hogy

$$n \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c^{a_i-b_i}!$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A $b_i>0$ és $c>0$ feltételek miatt alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az $\frac{a_i}{b_i} c^{a_i-b_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ pozitív valós számokra:

(1) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c^{a_i-b_i}}{n} \geqq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c^{a_i-b_i}} = \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i} c^{\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i}}.$$

De az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok egy permutációja a $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ezért

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

s így az (1)-ből

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c^{a_i - b_i} \geqq n \sqrt[n]{1 \cdot c^0} = n,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Szabó Kálmán, Miskolc

Megjegyzés: E feladatnak egy egyszerűbb változata szerepelt az 1935. évi középiskolai versenyen (Lásd: Matematikai Versenytételek, II. rész., Tankönyvkiadó), tudniillik az, amelyet feladatunkból a $c=1$ helyettesítéssel nyerünk.

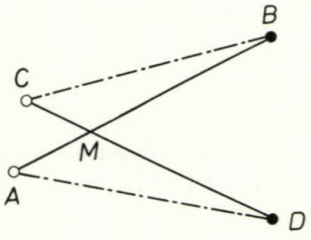
Szabó Kálmán, Miskolc

A megoldók száma: 14.

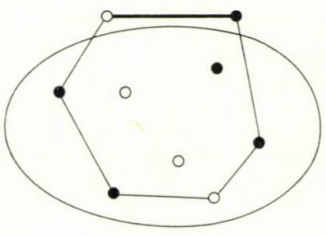
989. H a sík $2n$ olyan pontból álló halmaza, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be: bárhogyan is színezünk H-beli n pontot pirosra, a többit kékre, van n olyan szakasz, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja és végpontjai H-nak különböző színű pontjai!

I. Megoldás: Vegyük a $2n$ pontnak összes lehetséges „összekötő-rendszerét", azaz olyan szakasz n-eseket, amelyekben levő szakaszok közös végpont nélküliek, továbbá végpontjaik különböző színűek. Ilyen n-es pontosan $n!$ darab van, azaz véges sok. Válasszuk ki ezek közül azt az n-est, amelyben a szakaszok hosszának összege minimális!

Bizonyítjuk, hogy ebben az „összekötő-rendszerben" nincs metsző szakaszpár! Indirekt okoskodunk: Tegyük fel, hogy az AB és CD szakaszoknak van közös M pontja (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

A háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$$BC < BM + MC$$

$$AD < AM + MD,$$

azaz

$$AD + BC < CD + AB,$$

ez pedig ellentmond ama feltételünknek, hogy az AB és CD szakaszokat tartalmazó „összekötő-rendszer" hossza minimális.

Ambrus Gabriella, Budapest és
Nyirő László, Mezőkövesd

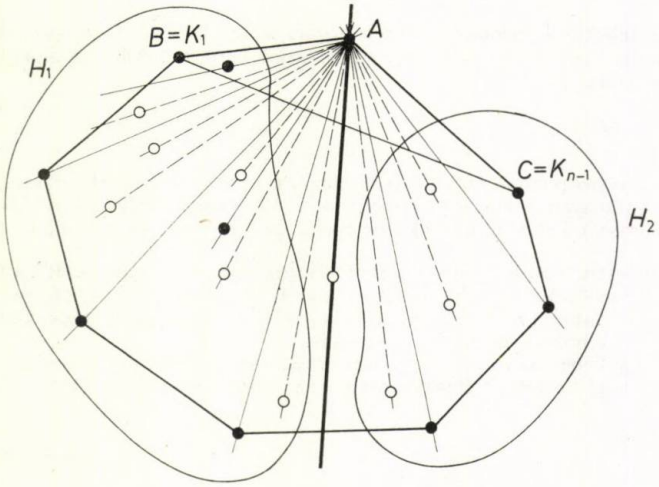
II. Megoldás: A feladat állítását a pontok száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

$n=1$-re az állítás igaz. Bebizonyítjuk, hogy ha igaz az állítás n-nél kisebb k-ra ($n \geqq 2$), akkor igaz n-re is.

Tekintsük H konvex burkát. A feltételek miatt ez olyan sokszög, melynek csúcsai a $2n$ pontból valók, s H minden más pontja e sokszög belsejében van.

Két eset lehetséges

1. A konvex buroknak van két különböző színű csúcsa. Ekkor a sokszögnek van olyan oldala, amelynek végpontjai különböző színűek (2. ábra). Tekintsük ezt az oldalt egy szakasznak.
A maradék $k=n-1$ számú pontpár az indukciós feltétel szerint összeköthető a feladat feltételeinek eleget tevő módon. Nyilvánvaló, hogy ezek egyike sem metszi az előbb kiválasztott szakaszt.
2. A konvex burok csúcsai egyszínűek — mondjuk kékek. Válasszunk ki egy csúcsot, jelöljük ezt A-val, az ezzel szomszédos két csúcsot pedig B-vel és C-vel. Tekintsük azt az A-ra illeszkedő $2n-1$ egyenest, amelyek mindegyike H egy-egy további pontjára illeszkedik. Megmutatjuk: ezek között van olyan, amelyik piros ponton megy át és a síkot olyan két félsíkra osztja, amelyek belsejében ugyanannyi piros pont van, mint kék (3. ábra).



3. ábra

Tekintsük a $H \setminus \{A\}$ halmaz pontjainak azt a sorrendjét, amelyet az A centrumú , BC egyenesre való vetítés szolgáltat. Ezek közül $n-1$ kék:

$$K_1 = B, \quad K_2, \ldots, K_{n-1} = C,$$

a többi piros:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

Rendeljünk a fenti pontokhoz egy-egy színüknek megfelelő egységnyi szakaszt, mégpedig a kékekhez x tengely, a pirosakhoz y tengely irányút, és a pontok (vetületük adta) sorrendjét egy $(n-1)x n$-es téglalaprácsban ábrázoljuk (4. ábra a 3. ábrán ábrázoltaknak megfelelően).

Olyan töröttvonalat kapunk, melynek kezdőpontja $O(0;0)$, végpontja $D(n-1;n)$. Mivel az első és utolsó szakasz kék, ezért töröttvonalunk töréspontjai között az $E(1;0)$ és $F(n-2;n)$ pontok szerepelnek. Tekintsük az $y=x$ és az $y=x+1$ egyenesek határolta S sávot. Ennek E az egyik, F a másik oldalán van, így a töröttvonal áthalad a sávon és a sávba eső első szakasz nyilvánvalóan piros. Ez viszont azt jelenti, hogy eme piros szakasz előtt is, után is ugyanannyi piros szakasz van, mint kék.

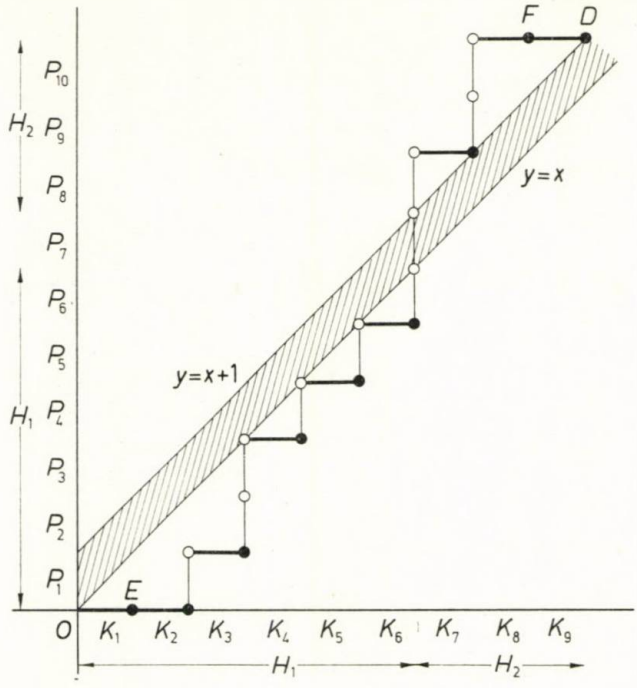
Ezzel beláttuk: létezik olyan A-ra illeszkedő, valamelyik P_i-n áthaladó egyenes, mely a $H \setminus \{A, P_i\}$ halmazt olyan H_1 és H_2 részhalmazokra bontja, amelyekben rendre ugyanannyi piros pont van, mint kék. A H_1 és H_2-re, az indukciós feltétel miatt, igaz az állítás: H_1 és H_2 különböző színű pontpárjai összeköthetők páronként közös pont nélküli szakaszokkal. Tartozzon A-hoz P_i. Nyilvánvaló, hogy egy H_1 és egy H_2-beli szakasz sem egymást, sem pedig az AP_i szakaszt nem metszi.

Kamarás Lajos, Pécs

Megjegyzés: A feladat szerepelt a Tanárképző Főiskolák Matematika Versenyén, az 1976. évben.

Ambrus Gabriella, Budapest

A megoldók száma: 7.



4. ábra

990. Bizonyítsuk be: az α, β szögű háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha

$$2 \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{4}} = 1.$$

Bodnár János, Budapest

Megoldás: Először belátjuk, hogy a feltétel *elégséges*, azaz ha a háromszög egyenlő szárú, akkor az összefüggés igaz. A háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha

1. $\alpha = \beta$

vagy

2. $\alpha = \pi - (\alpha + \beta)$.

Az 1. esetben teljesül az összefüggés. A 2. esetben

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \text{és ezért} \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sin\alpha,$$

valamint

$$\frac{\pi-\beta}{4} = \frac{\alpha}{2}.$$

Emellett felhasználjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}.$$

Összefüggésünk bal oldalát ezek felhasználásával alakítjuk:

$$2\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{4}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}=\frac{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}-\frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^2}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1,$$

és ezt kellett igazolnunk.

A feltétel *szükséges* is. Ugyanis bevezetve a

$$\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}=u \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{4}=v \quad (0<u<1, \quad 0<v<1)$$

jelöléseket, egyenletünk zérusra redukált alakjában ezek szerint

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sin 2\cdot\frac{\pi-\alpha}{4}=\frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\frac{\beta}{2}=\frac{2v}{1+v^2},$$

tehát egyenletünk:

$$2\cdot\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{1+v^2}{2v}-\frac{u}{v}-1=0.$$

A törtek eltávolítása és összevonás után:

$$(u-v)(u^2+2uv-1)=0.$$

Az $u=v$ esetén $\alpha=\beta$ áll fenn, tehát a háromszög egyenlő szárú.

Ha pedig

$$u^2+2uv-1=0,$$

akkor $(u+v)^2=v^2+1$-ből $0<u<1$ miatt $u=\sqrt{v^2+1}-v$, tehát

$$\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}=\frac{1}{\cos\frac{\pi-\beta}{4}}-\frac{\sin\frac{\pi-\beta}{4}}{\cos\frac{\pi-\beta}{4}}=\frac{1-\sin\frac{\pi-\beta}{4}}{\cos\frac{\pi-\beta}{4}},$$

amiből a hányados összefüggést felhasználva összevonás után:

$$\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\pi-\beta}{4}+\cos\frac{\pi-\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\pi-\beta}{4}=\cos\frac{\pi-\alpha}{4},$$

azaz

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{4}\right)=\cos\frac{\pi-\alpha}{4},$$

tehát

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{4} = \cos\frac{\pi-\alpha}{4}.$$

De a két szög koszinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$\frac{\alpha+\beta}{4} = \frac{\pi-\alpha}{4}+2\pi k, \quad \text{vagy} \quad \frac{\alpha+\beta}{4}+\frac{\pi-\alpha}{4} = 2\pi k.$$

Az α és β π-nél kisebb pozitív valós számok, így ezekből csakis az első ad $k=0$ mellett megoldást:

$$2\alpha+\beta = \pi,$$

tehát $\gamma=\alpha$, azaz a háromszög egyenlő szárú.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 18.

991. Az (a_n) valós számsorozatot súlyozott számtani sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan φ és ψ pozitív valós szám, hogy $\varphi+\psi=1$, és minden $n\geqq 2$-re

$$a_n = \varphi a_{n-1}+\psi a_{n+1}.$$

Igazoljuk, hogy (a_n) pontosan akkor súlyozott számtani sorozat, ha található olyan (g_n) monoton mértani sorozat és a_0 valós szám, hogy minden n-re

$$a_n = a_0+\sum_{k=1}^{n} g_k!$$

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Megoldás: Legyen (a_n) súlyozott számtani sorozat. Az a_1 és a_2 rögzítése mellett az

$$a_{n+1} = \frac{1}{\psi}a_n-\frac{\varphi}{\psi}a_{n-1} \quad (\varphi+\psi=1)$$

rekurzióval adhatjuk meg a sorozatot.

Molnár Emil: Rekurzív sorozatok (ELTE, TTK Módszertani Közleményei X., 1977) cikkében kimutatta, hogy az
$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ $(n>2)$ rekurzióval adott sorozat bármely eleme egyértelműen írható

$$a_n = d_1p_1^{n-1}+d_2p_2^{n-1}$$

alakban, ahol p_1 és p_2 a

$$p^2-c_1p-c_2 = 0$$

egyenlet két különböző valós gyöke, d_1 és d_2 pedig az a_1 és a_2 rögzítésével adott.

Ezt figyelembe véve a

$$p^2-\frac{1}{\psi}p+\frac{\varphi}{\psi} = 0$$

gyökei:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{\varphi}{\psi},$$

azaz

$$a_{n+1} = d_1+d_2\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^n. \tag{1}$$

A d_1 és d_2 meghatározására

$$a_1 = d_1+d_2, \quad a_2 = d_1+d_2\frac{\varphi}{\psi}$$

egyenletrendszer áll rendelkezésünkre. Ebből

$$d_1 = a_1 - \frac{\psi}{\varphi - \psi}(a_2 - a_1),$$

$$d_2 = \frac{\psi}{\varphi - \psi}(a_2 - a_1),$$

tehát (1) miatt

$$a_{n+1} = a_1 - \frac{\psi}{\varphi - \psi}(a_2 - a_1) + \frac{\psi}{\varphi - \psi}(a_2 - a_1)\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^n = a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\psi}{\varphi - \psi}\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^n - 1\right] =$$

$$= a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^n - 1}{\frac{\varphi}{\psi} - 1}.$$

Található tehát olyan (g_n) monoton mértani sorozat és a_0 valós szám, hogy minden n-re

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} g_k,$$

hiszen az $a_0 = a_1$, $g_1 = a_2 - a_1$ és $q = \frac{\varphi}{\psi}$ választás megfelel.

(Bizonyításunkban felhasználtuk, hogy $\varphi \neq \psi$. Ha $\varphi = \psi$ úgy (a_n) számtani sorozat, tehát $d = a_{k+1} - a_k$ minden $k \geqq 1$-re, azaz

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) = (2a_1 - a_2) + nd = (2a_1 - a_2) + \sum_{k=1}^{n} d,$$

ahol (d) nyilván monoton mértani sorozat.)

Megfordítva: Ha található olyan (g_n) monoton mértani sorozat és a_0 valós szám, hogy minden n-re

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} g_k,$$

akkor

$$a_n = a_0 + g_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

Legyen

$$\varphi = \frac{q}{q+1} \quad \text{és} \quad \psi = \frac{1}{q+1}.$$

Ekkor

$$\varphi a_{n-1} + \psi a_{n+1} = \frac{q}{q+1}a_0 + \frac{q}{q+1}g_1\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} + \frac{1}{q+1}a_0 + \frac{1}{q+1}g_1\frac{q^{n+1} - 1}{q-1} =$$

$$= a_0 + g_1\frac{1}{(q+1)(q-1)}(q^n - q + q^{n+1} - 1) = a_0 + g_1\frac{q^n - 1}{q-1} = a_n,$$

és ezt kellett bizonyítsuk.

Ha $q = 1$, akkor $\varphi = \psi = \frac{1}{2}$ választás mellett az $a_n = a_0 + ng_1$ felhasználásával

$$\varphi a_{n-1} + \psi a_{n+1} = \frac{1}{2}[a_0 + (n-1)g_1] + \frac{1}{2}[a_0 + (n+1)g_1] = a_0 + ng_1 = a_n,$$

ismét teljesül.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 14.

992. Jelölje $f(n)$ az n pozitív egész tízes számrendszerbeli alakjában előforduló 0 számjegyek számát. Az $a>0$ mely értékeire konvergens

$$\sum_{n=1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}?$$

Megoldás: Legyen az n számjegyeinek száma $m+1$ ($m \geqq 0$), akkor $10^m \leqq n < 10^{m+1}$. Tetszőleges p természetes számra összesen

$$9^{m-p+1}\binom{m}{p}$$

olyan $m+1$ jegyű n szám van, amelyre $f(n)=p$. Ekkor

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^k} < \sum_{m \geqq 0}\left[\frac{1}{10^{km}} \sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p} a^p 9^{m-p+1}\right] = \sum_{m \geqq 0} 9\left(\frac{9+a}{10^k}\right)^m,$$

ez pedig konvergens, ha

$$0 < a < 10^k - 9.$$

Másrészt,

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^k} > \sum_{m \geqq 0}\left[\frac{1}{10^{km+k}} \sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p} a^p 9^{m-p+1}\right] = \sum_{m \geqq 0} \frac{9}{10^k}\left(\frac{9+a}{10^k}\right)^m,$$

ami divergens, ha

$$10^k - 9 \leqq a.$$

Ha $k=2$, akkor a feladatbeli sor $0<a<91$ esetén konvergens.

Bencze Mihály, Brassó

Megjegyzés: A vizsgált sorra alsó és felső becslés adható. A $0<a<91$ feltétel mellett a $\sum_{n \geqq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^k}$ sort majoráló, illetve minoráló fenti sorok mértani sorok. Ezekből a $k=2$ választásra:

$$\frac{9}{91-a} < \sum_{n \geqq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} < \frac{900}{91-a}.$$

Csekély módosítással vizsgálhattuk volna a kérdést q alapú számrendszerben is.

A majoráns illetve minoráns mértani sor hányadosára $\frac{q-1+a}{q^2}$ adódna, s így sorunk a

$$0<a<q^2-q+1$$

esetén konvergens, különben divergens.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 2.

A megoldók névsora (987—992.)

Ambrus Gabriella, Budapest (988—991.); Bencze Mihály, Brassó (988., 990—992.); Bogdán Zoltán, Cegléd (988., 989. 3 mód, 990, 991.); Csorba Ferenc, Győr (988., 990., 991.); Csorsz Sándor, Dunakeszi (987., 991.); Gőgh József, Güta (990.); Giczi Margit, Sümeg (991.); Harcsár Zoltán, Szeged (990.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (990.); Hornyák Pál, Érsekújvár (987—990.); Hortobágyi János, Gyulaj (988.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (987., 988., 990., 991.); Kamarás Lajos, Pécs (987—992); Kondor Judit, Budapest (988., 990.); Mészáros József, Galánta (988., 990.); Nagy Imecs Vilmos, Székelyudvarhely (990., 991.); Nyirő László, Mezőkövesd (988—991.); Schutzbach Mártonné, Siófok (987.); Szabó Kálmán, Miskolc (988., 990., 991.); Szánthó Gyula, Gyula (987—991.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (988., 990., 991.).

ORGTECHNIK '82

A Szervezési és Vezetési Tudományos Társaság, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének tagja

1982. november 16-tól 20-ig

Budapesten az Országos Széchényi Könyvtár helyiségeiben (Budavári Palota F épülete Budapest I., Szent György tér, a Budapesti Történeti Múzeum mellett) rendezi meg

ORGTECHNIK '82

„Versenyképes szervezés- és vezetéstechnikai eszközök, alkalmazások"

elnevezésű, nemzetközi részvételű szakkiállítását.

Bemutatásra kerülnek

— információ-rögzítő, -továbbító és -tároló eszközök,
— a reprográfia eszközei,
— dokumentumok nyilvántartásának, rendszerezésének és kezelésének eszközei,
— az irat- és adatfeldolgozás eszközei,
— irodai és adatfeldolgozó munkahelyek kialakítása; irodafelszerelés,
— irodai kisgépek,
— irodaszerek, műszaki rajzeszközök,
— a termelésirányítás eszközei,
— üzemi munkahelyek korszerű kialakítása és az ehhez felhasznált eszközök,
— szervezéstechnikai software,
— szervezési szakirodalom.

A kiállításon szakmai napok, termékismertető előadások is lesznek

— a mezőgazdaság,
— az ipar,
— a kereskedelem,
— az oktatás,
— a kutatás-fejlesztés területéről.

A Matematika Tanítása olvasóinak látogatását is várja

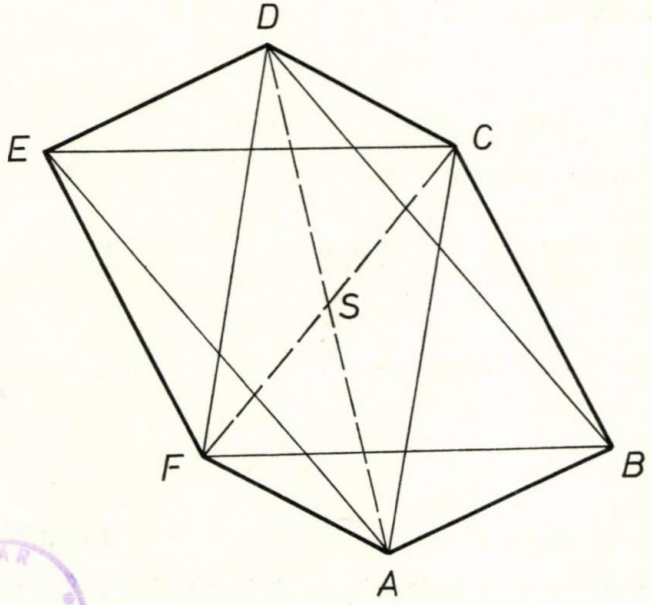
az ORGTECHNIK '82
RENDEZŐ BIZOTTSÁGA

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 5F5

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



KÖNYVTÁR

1982. december * XXIX. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

82-4631 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Ledneczky Ferenc: Geometriai modellező készlet 161
Iker János: A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lehetőségei 6. osztályban 166
Újvári István: Új matematika tankönyvek a felnőttoktatásban 170
Hódi Endre: Beszámoló a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 174
Kamarás Lajos—Póla József: Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről I. 183

FELADATOK 189

INHALT

Ledneczky, Ferenc: Ein geometrischer Modellierungsvorrat 161
Iker, János: Die Möglichkeiten der Entwicklung der kombinatorischen Denkart in der 6-ten Klasse 166
Újvári, István: Neue Mathematik-Lehrbücher im Unterricht der Erwachsenen 170
Hódi, Endre: Bericht über die XXIII. Internationale Mathematik-Olympiade 174
Kamarás, Lajos—Póla, József: Bericht über den mathematischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1982 I. Teil 183

AUFGABEN 189

СОДЕРЖАНИЕ

Леднецки Ференц: Набор для геометрического моделирования 161
Икер Янош: Возможности развития комбинаторического мышления в шестом классе 166
Уйвари Иштван: Новые учебники математики для взрослых 170
Ходи Эндре: О XXIII Международной олимпиаде школьников по математике 174
Камараш Лайош—Пола Йожеф: О математическом соревновании 1982 г. студентов педагогических институтов I. 183

ЗАДАЧИ 189

LEDNECZKY FERENC
tanár
Mecseknádasd

Geometriai modellező készlet

A készlet segítségével síkbeli és térbeli töröttvonalak változatos formái alakíthatók ki, helyettesíti a drága és terjedelmes Babylon-készletet. Lehetővé teszi a geometriában a mozgások, változások, fokozat nélküli átmenetek és ugrásszerű minőségi változások szemléltetését. Az eszköz használatát a tanulók is könnyen elsajátítják.

A készlet acélpálcákból, az acélpácák rugalmas összekötésre alkalmas elágazó és egyenes gumicsövekből, lapközépen 3 egymásra merőleges irányból átfúrt gumikockákból, megfelelően meghajlított alumínium huzalból és az eszközök befogadására alkalmas dobozból áll. Az acélpálcák a gumicsövek segítségével tetszés szerinti sorrendben összekapcsolhatók és könnyen szétszerelhetők, a csatlakozás helye körül a tér minden irányában elforgathatók.

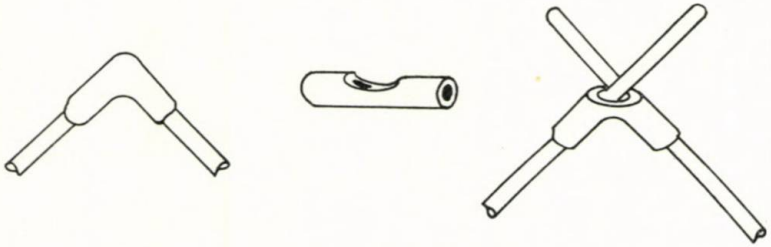
Számítva 1-1 elem elvesztésére, a csatlakozó gumik szakadására, egy készlet az alábbi elemekből áll:

a) 2 mm ∅ acélpálcák:
4 cm-es 20 db, 8 cm-es 4 db, 5 cm-es 10 db, 10 cm-es 4 db, 6 cm-es 6 db, 20 cm-es 2 db, 7,5 cm-es 4 db.

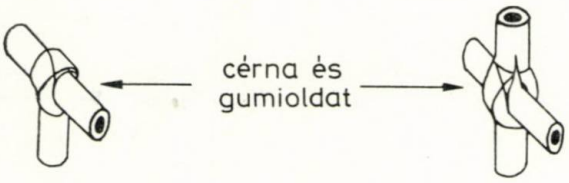
b) egyszerű és félig bevágott kötő elem kerékpár-szelepgumiból, hossza 14 mm és 20 mm, készletenként 20-20 db (1. ábra).

c) elágazó kötő elemek: 3 és 4 irányú elágazással 20-20 db (2. ábra).
Jó volna, ha ezek gyártására a TANÉRT vállalkozna. A többi elem és a tároló doboz technika órákon elkészíthető.

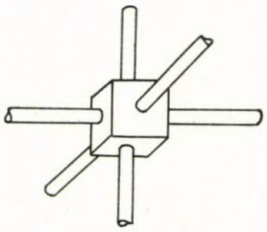
d) 6 irányú elágazás 1 cm élű gumikockából (3. ábra), 10 db készletenként.



1. ábra



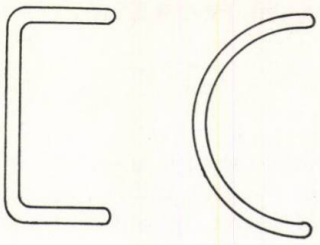
2. ábra



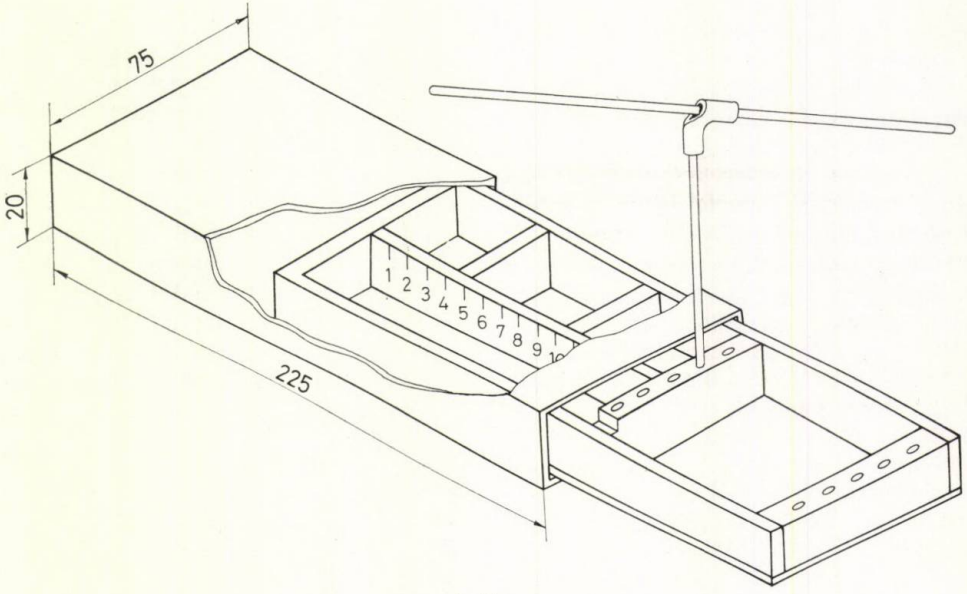
3. ábra

e) Hajlított alumínium huzalok (4. ábra).

f) Az eszköz fontos része a tároló doboz is (5. ábra). Az oldalfal belső szélén centiméteres beosztást készítünk. A beosztás meggyorsítja a megfelelő hosszúságú pálcák kiválasztását. A két keresztirányú válaszfalba a pálcikák vastagságának megfelelő furatokat készítünk.



4. ábra



5. ábra

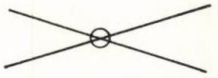
Fontos, hogy a kötő elemek csak enyhén szoruljanak a pálcikákra. Ellenkező esetben az eszköz kezelése nehézkes. Az elemekből összeállított síkbeli alakzatok írásvetítővel jól vetíthetők. Négyzetrácsos beosztású fóliával és átlátszó szögmérővel kiegészítve az alkalmazása tovább bővíthető.

A továbbiakban a készlet néhány alkalmazását mutatom be. A csatolt ábrákon az alábbi jelöléseket vezetem be:

acélpálca: egyenes vonal

egyszerű és elágazó kötő elem:

félig bevágott kötő elem:



Illeszkedési feladatok

1. Szúrjunk egy 10 cm-es pálcikát a tartó doboz válaszfalának szélső furatába! A kiálló hegyét tekintsük pontnak! Illesszünk erre a pontra egy 20 cm-es pálcikát! Ezt tekinthetjük egyenesnek. A pontra illeszkedve az egyenes milyen mozgást végezhet, ha az egyenes adott pontja a rögzített ponton marad? (5. ábra.)

2. Illesszünk a pontra egy sík lapot! A pont körül a sík lap minden irányban szabadon foroghat, billenhet.

3. Szúrjunk a másik szélső furatba egy 8 cm-es pálcikát! A két pálcika hegyét egy-egy pontnak tekintjük. Illesszünk a két pontra egy egyenest (egy pálcikát)! Az illeszkedés után a pálcika helyzetét a két pont egyértelműen meghatározza. Két ponton át csak egy egyenes húzható.

4. Illesszünk a két pontra egy sík lapot! A két pontra illeszkedve a sík „mozgási szabadsága" csökkent. A két pont által meghatározott egyenes mint forgás tengely körül még foroghat. Harmadik pontot kitűzve újabb illesztési próba után a tanulók felismerik, hogy 3 pont egyértelműen meghatározza a síkot, ha a 3 pont nem esik 1 egyenesbe.

5. Egy egyenesre mindig illeszthető egy sík, illetve a síkra egy egyenes. Kapcsoljunk össze két pálcikát egy egyszerű kötő elemmel és törjük kissé meg a kötő elem mentén a rendszert! A két egymást metsző egyenes is mindig beilleszthető egy síkba, illetve két metsző egyenesre illeszthető egy sík. Három egyenesből alkotott töröttvonal már térbeli is lehet. Három pálcát gumicsővel összekapcsolva és megtörve — hogy ne essenek egy egyenesbe —, illesszünk az asztal síkjára! Két pálcát szorítsunk az asztal lapjához! A harmadik pálcát a síkból kiforgathatjuk. Ez az egyenes „döfi" a síkot.

6. Vegyünk fel a térben 4 pontot úgy, hogy közülük 3 pont ne essen egy egyenesbe! Vegyünk 4 különböző hosszúságú pálcikát és dugjuk a doboz egymástól távoleső furataiba! Illesszünk a 4 pontra egy sík lapot! Ez nem sikerül. 4 pontra nem mindig tudunk síkot illeszteni.

A fenti példákhoz hasonlóan pontok, egyenesek, síkok sokféle illeszkedését vizsgálhatjuk.

Szőnyegezési feladatok

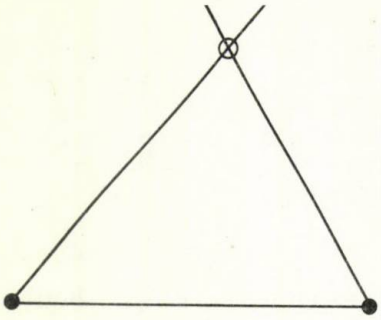
Az ismert szőnyegezés a „töröttvonal" segítségével úgy értendő, hogy a síkot pálcikák összekapcsolásával alkotott háló segítségével osztjuk egybevágó lapokra. Ezt a felosztást a sík lap határáig, a síkon vég nélkül folytathatjuk. A síknak ilyen felosztása annak felismerését segíti, hogy a sík végtelen, és elősegíti a területszámítás megértését mint összehasonlítás az egységül választott területtel. Háromszögekből felépített síkháló nem deformálható, négyzetekből, téglalapokból, rombuszokból, deltoidokból vagy szabályos hatszögekből kialakított háló deformálható.

Tanulságok: Az egységül választható terület végtelen sokféle lehet. A háromszöget a három oldala egyértelműen meghatározza, de az egyéb sokszögekre ez nem áll.

Háromszögekkel kapcsolatos feladatok

1. Állítsatok össze 4 cm-es, 5 cm-es és 10 cm-es pálcikákból töröttvonalat! Zárjátok háromszöggé! Miért nem sikerül? Hogyan kell a pálcikák hosszát megválasztani ahhoz, hogy a töröttvonalat háromszöggé lehessen összekapcsolni? Így vizsgálhatjuk az oldalak közötti egyéb összefüggéseket is.

2. Állítsatok össze háromszöget a 6. ábra szerint! Az egyik oldal növelésével együtt mi változik meg? (A háromszög magassága, szögei, területe.) Hogyan változnak meg a szögei? Milyen összefüggés van az oldal és a vele szemközti szög között? Hogyan változnak a növekvő oldalon levő szögek, ha a másik két oldal nem változik? Meddig nőhet a háromszög egyik szöge? (A 180 °-ot nem érheti



6. ábra

el.) Növeljük tovább az előbbi oldalt, amíg lehet! Mit tapasztalunk? (Az egyik oldalt növelve a vele szemközti szög is egyre nő, míg eléri a 180 °-ot, de ekkor a másik két szög értéke nulla fok, megszűnik a háromszög.)

3. Állítsatok össze háromszögeket 4 cm-es, 5 cm-es és 6 cm-es pálcikákból! Megengedett egy háromszögön belül az egyes elemek ismétlődése is. Hány különböző háromszöget tudsz összeállítani?

4. Állítsatok össze „töröttvonalat" 5 cm-es és 6 cm-es pálcikából, hogy 40 °-os szöget zárjanak be! Ha háromszöggé akarjuk összezárni, megválaszthatjuk-e tetszés szerint a harmadik oldal hosszúságát?

Négyszögekkel kapcsolatos feladatok

1. Állítsatok össze négyszöget a „töröttvonal" elemeiből! Oldalai rendre: $a=5$ cm, $b=6$ cm, $c=7{,}5$ cm, $d=10$ cm hosszúak. Igaz-e, hogy az így készített négyszögek mind egybevágóak? (Nem igaz.) Miben különbözhetnek egymástól az adott oldalakkal készített négyszögek? (Szögei, átlói különbözhetnek egymástól.) Milyen kiegészítő utasítást kell adni, hogy a négyszögek mind egybevágóak legyenek?

2. Alakítsatok ki téglalapot 5 és 8 cm-es oldalakkal! Helyezzétek négyzetrácsos papírra! Csökkentsük az egyik szöget! A szög változásával együtt mi változik még meg a négyszögben? (A szomszédos szögek növekednek, a szemközti szög csökken. A szög menti átló nő, a szöggel szemközti átló csökken. Mindkét magasság csökken, a terület is csökken. A szimmetriaközpont a csökkenő szögek csúcsától távolodik, a növekvő szögek csúcsaihoz közeledik. Ugrásszerű minőségi változás, hogy megszűnik a tengelyes szimmetria.)

3. A négyszögek rendszerezéséhez a 7. ábra szerint összeállítunk egy négyszöget, majd azt átalakítjuk trapézzá, a trapézt paralelogrammává, a paralelogrammát téglalappá, a téglalapot négyzetté. A paralelogramma oldalait változtatva rombuszt, a rombuszból pedig a szögek változtatásával négyzetet alakítunk ki. A fogalmak alá- és fölérendelési viszonya a manipuláltatással „kézzelfogható". A fenti átalakítási sor jó szemléleti alapot ad a definiáló képesség fejlesztéséhez is. Hasonló átalakításokkal világíthatjuk meg a deltoid—rombusz—négyzet összefüggést is.

A készlet felhasználásának egyéb síkbeli lehetőségei

1. A szög fajainak, a szög forgási irányainak bemutatása és ezzel kapcsolatban a szögmérés technikájának gyakorlása, a szögméréssel kapcsolatban a nyugvó szár és mozgó szár megismertetése stb.

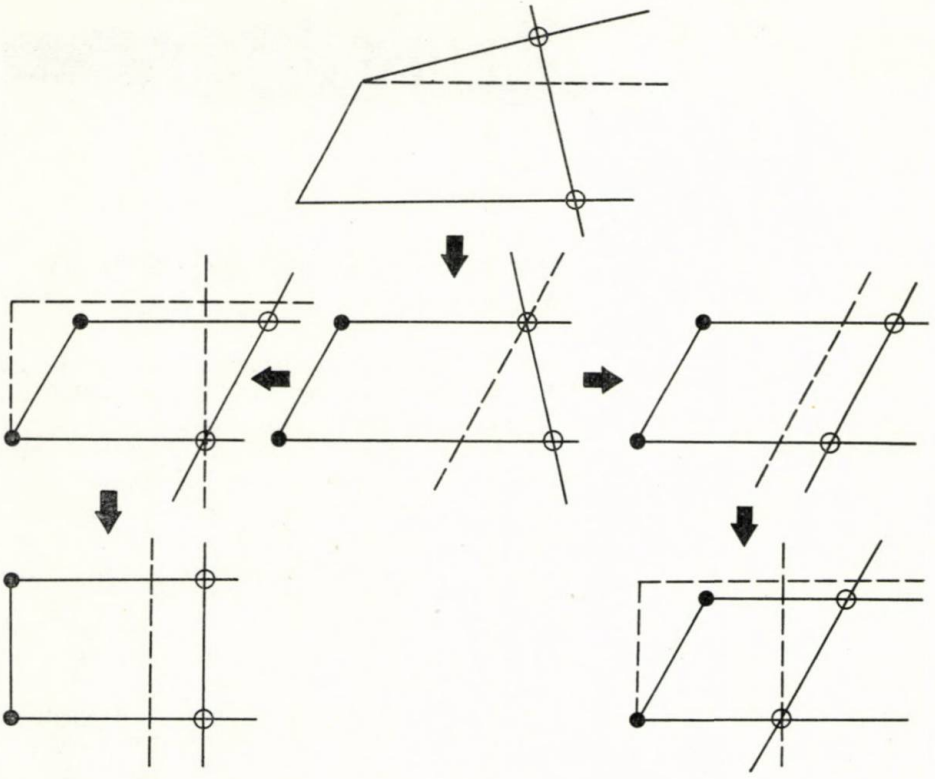
2. Kerület mérése: A sokszöget egyik csúcsánál kinyitjuk, egyenes vonallá alakítjuk és így mérjük meg.

3. Az eszközt használhatjuk a szögfüggvények fogalmának első, szemléletes megközelítésénél is.

4. A konvexitással, konvex — nem konvex átmenetekkel kapcsolatos problémák szemléltetésénél.

A készlet térgeometriai alkalmazása

Elemeiből az általános iskolában tanított valamennyi egyenes élű test élváza is kialakítható. A csúcsokra olyan csatlakozó elemet helyezünk, amely megfelel a csúcsban összefutó élek számának. A



7. ábra

hasábok alapsokszögei a csatlakozó elemek feszítésével és lazításával, valamint az alapélek számának változtatásával sokféleképpen variálhatók, de cserélhetők az oldalélek is. Az egyenes hasábok kicsi nyomással átalakíthatók ferde hasábbá, sőt a síkba lapíthatók. A hasábok deformálása közben megfigyelhetjük az oldalélek és a magasság egymáshoz viszonyított helyzetének és egymáshoz viszonyított arányának változását, a magasság változásával összefüggésben pedig megfigyelhetjük a hasáb térfogatának és az egyes oldallapok alakjának változását is. A készlet alkalmas még a tetraéder, négyzetes gúla és az oktaéder élvázának kialakítására is. Az ábrázoló geometria elemeinek tanításához térbeli töröttvonalakat alakíthatunk ki a készlet segítségével.

A készlet néhány térbeli mértani hely keresésére is alkalmas. A pálcikák megfelelő csatlakoztatásával egyszerű eszközöket állíthatunk össze forgástestek előállítására.

A cikk terjedelme korlátokat szab további alkalmazások bemutatásának. Aki hasznosnak tartja az eszközt, és munkájában alkalmazni kívánja, apró ötletekkel újabb feladatokat állíthat össze.

A TANÉRT Vállalat igen hasonló eszközt tervezett „Élvázépítő készlet" elnevezéssel. Az eszköz mintapéldánya elkészült; és a TANÉRT forgalmazásában lesz kapható.

(*A szerkesztő*)

IKER JÁNOS
főiskolai adjunktus
Szombathely

A kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének lehetőségei 6. osztályban

Az általános iskolai matematika-tanterv tananyagfelsorolásából és a követelményekből megállapíthatjuk, hogy a kombinatorika tanításának alapvető feladata „szokványos és nem szokványos" kombinatorikai problémák — zömmel — tapasztalati úton történő tanulmányozása, és rajtuk keresztül a kombinatorikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése. Kicsit pontosabban talán úgy fogalmazhatnánk, hogy e tantervi téma körébe véges számú elemekből képezhető véges sorozatok és halmazok — adott feltételeket kielégítő — változatainak előállítása, illetve a változatok számának megállapítása tartozik. A változatok előállításának és „leszámlálásának" módjai: kirakások, rajzok, gráfok, táblázatok.

Nem cél a klasszikus kombinatorikai problémák fogalmi tisztázása, a hozzájuk kapcsolódó képletek használata. Ugyanakkor a kombinatorikus gondolkodásmód fejlesztésének módszertani fokozatai (lásd: Tantervi útmutató, Matematika 6. osztály. Tankönyvkiadó, Bp. 1979. 188—190. oldal) felső tagozaton (elsősorban 6. osztálytól) megkövetelik a tanulóktól a szemléleti tartalmukban különböző, de azonos matematikai modellre vezető feladatok megoldását, bennük a paraméterek (változók) rendszeres változtatását; megalapozva ezzel az összefüggések felismerését. Ezen fokozatok lehetőséget adnak a lényeglátó, megismerő gondolkodási tevékenység fejlesztésére és egyben az egyes fogalmak fokozatos érlelése is megvalósul. Közben a tanulóknak lehetőségük nyílik olyan konkrét módszerek és sémák felfedezésére, amelyek a matematika különböző területein lehetővé teszik az adott feltételeknek megfelelő összes változatok rendszeres felkutatását és a lehetséges variánsok számának meghatározását.

A következő néhány feladat megoldásával a fenti fokozatok és a velük összhangban levő 6. osztályos követelmények megvalósításának egy lehetőségét kívánom bemutatni. A feladatokban a közös matematikai tartalom az ismétléses variáció, amely jó lehetőséget kínál a követelményekben meghatározott sorozatok képzésére.

Természetesen ez a feldolgozás csupán a gondolkodási mód és a megoldási módszerek fejlesztésének egy — a terjedelem megkívánta — tömör mintája, amely sok hasonló típusú probléma megoldásával kristályosodik ki 5. osztálytól 6. osztály végéig.

Feladatok

1. *a)* Feldobunk 3 különböző pénzdarabot. Hányféleképpen eshetnek le?
b) Négy különböző pénzdarabot dobunk fel. Hány eset lehetséges? Minek van nagyobb valószínűsége; annak, hogy pontosan 1 fej, vagy annak, hogy pontosan 3 fej van felül?

2. Morzejeleket készítünk · és — jelekből. Hány legfeljebb 5 tagú morzejel készíthető?

3. Az iskolai kispályás labdarúgó bajnokság nyolcas döntőjében összesen 4 mérkőzést bonyolítanak le. Hogy az érdeklődést minden mérkőzésre biztosítsák, a szervezők totószelvényeket bocsátottak ki, amelyeken mind a 4 mérkőzés eredményét meg kell tippelni. A tippek — az igazi totóhoz hasonlóan — 1, 2 vagy x lehettek minden mérkőzésre; aszerint, hogy a párosításban az első helyen vagy a második helyen szereplő csapat győzelmét, illetve döntetlent várt-e a tippelő. A telitalálatos szelvények tulajdonosai között futball-labdát sorsolnak ki. A 6. osztályos fiúk — akik összesen 59-en voltak — szerettek volna labdát nyerni. Ezért mindenki kitöltött egy-egy totószelvényt, és ügyeltek arra, hogy valamennyi szelvény különböző módon legyen kitöltve. Lesz-e biztosan telitalálatuk?

4. Egy kisvárosban 1567 telefonelőfizető van. Hány jegyű telefonszámokra van szükség, ha minden telefonszám egyessel kezdődik és a jegyek száma mindegyikben azonos?

Feldolgozási javaslat

A megoldási lehetőségek bemutatása előtt célszerű idézni a kombinatorikával kapcsolatos 6. osztályos követelményt: „Kombinatorikus problémákban tudják az adatokat változtatni, a lehetőségek számát sorozatokba, táblázatokba rendezni."

A fenti követelmény megvalósításához már az előző évfolyamokon érlelődtek a tanulók tapasztalatai. Harmadik és negyedik osztályban különböző kombinatorikai problémák tanulók által történő megoldását az összes változat tényleges fizikai előállítása jellemezte. Eközben (különösen, ha a változatok száma elég nagy volt) felfedeztek bizonyos rendezési lehetőségeket, amelyek lehetővé tették, hogy 5. osztályban már néhány eset előállításából következtessenek a többi esetre is; anélkül, hogy azokat ténylegesen előállították volna.

Hatodik osztályra a tanulók jártasságának fejlődése lehetővé teszi, a változatok számának további növekedése és a feladatok jellege pedig kikényszeríti, hogy a tanulók végleg lemondjanak az összes változat fizikai előállításáról, s áttérjenek a gondolatban történő előállításukra. Az elképzelt esetek áttekintését táblázatok használatával könnyíthetjük meg. Ez összhangban van a tanulók életkori sajátosságainak változásával is, amely szintén indokolja a közvetlen érzéki-manuális tevékenység fokozatos háttérbe szorulását az absztraktabb tevékenység javára.

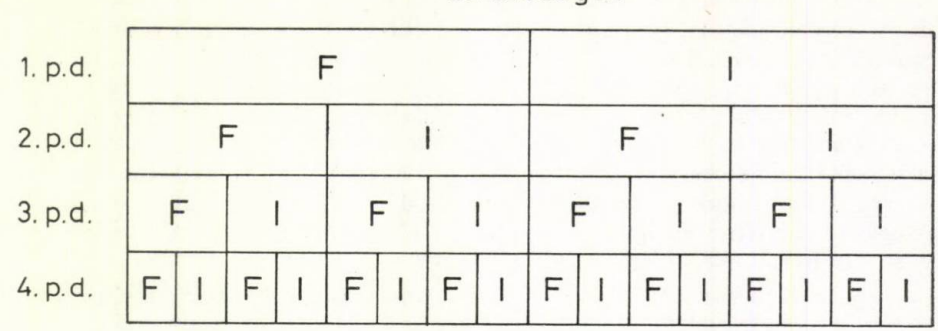
A fentiek figyelembevételével nézzük az ismétléses variációkra vezető feladatok feldolgozási lehetőségeit!

Az első feladat *a)* részének megoldásában felhasználhatják a tanulók az 5. osztályban — a konkrét pénzfeldobásokban — szerzett tapasztalataikat, és bizonyos rendezés alapján felírhatják (betűkódokkal) az összes lehetséges esetet:

FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI,
IIF, III.

A feladat *b)* részének megoldását a tanár két oldalról inspirálhatja. Egyrészt felteheti a kérdést, hogy a negyedik pénzdarab 2-féle (F vagy I) leesési változata kapcsolható-e a három pénzdarab összes lehetőségéhez? Lehetséges, hogy ezt a tanulók maguktól is felfedezik és megállapítják, hogy az előző 8 eset mindegyikéhez újabb két lehetőség kapcsolódik, és így az összes eset száma 4 pénzdarab feldobásakor 16. Ez viszonylag gyors módszer az összes eset megtalálására, viszont nehéz összeszámlálni, hogy hányszor lesz pontosan 1, illetve pontosan 3 fej. Azonban, ha — a gondolatmenet analógiájára — a tanár táblázat készítését javasolja, könnyen áttekinthetők lesznek a különböző esetek.

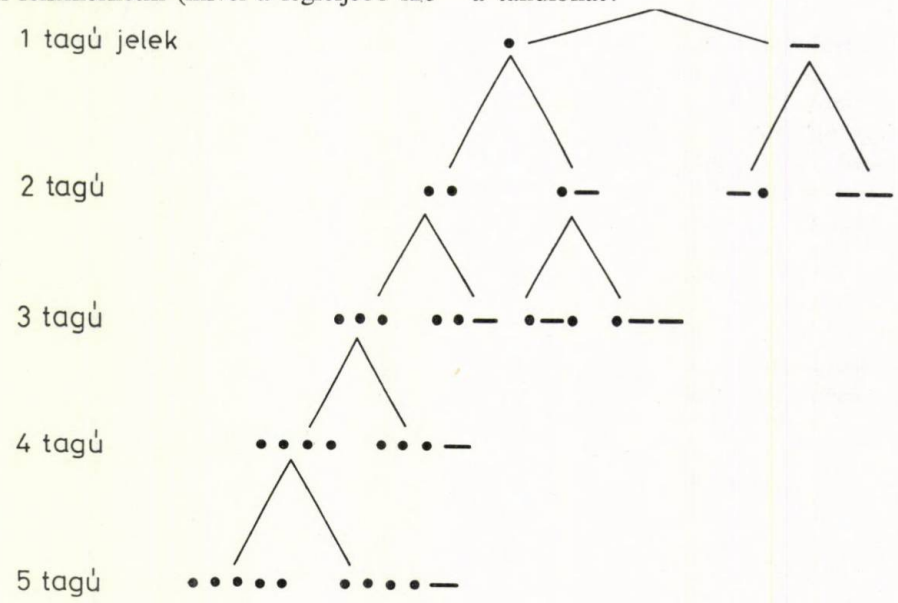
Az egyes változatok (variációk) a táblázatból fentről lefelé a függőleges vona-



1. ábra

lak átlépése nélkül leolvashatók. Különválasztva a pontosan 1 fejet, illetve a pontosan 3 fejet tartalmazó eseteket láthatjuk, hogy számuk azonos (4), ezért bekövetkezési lehetőségük (valószínűségük) is azonos.

A második feladatban a tanulók azonnal felismerhetik (mivel a legfeljebb szó használatát már tudják), hogy az összes 1, 2, 3, 4, 5 tagú morzejeleket kell összeszámlálni. A megoldáshoz kínálkozik az előző táblázat használata is, de célszerűbb, ha a tanár más modellezési lehetőséget ajánl oly módon, hogy a következő ábra folytatására szólítja fel a tanulókat:



2. ábra

A teljes megrajzolás után létrejött séma (fagráf) egy sorban levő vonalainak száma adja az adott feltételhez tartozó lehetőségek számát. Célszerű az így kapott eredmények számtáblázatba rendezése:

Ennyi tagú a jel	1	2	3	4	5	
Ennyi a lehetőségek száma	2	4	8	16	32	Összesen: 62.

A teljes fagráf megrajzolása természetesen nem minden tanuló számára indokolt, hisz bizonyára lesznek olyanok, akik hamarosan felismerik a számtáblázatba foglalt összefüggést. Ugyanakkor a gráf az összeszámlálás mellett segíti a pontok és vonalak sorbarendezését (pontosabban sorozatba rendezését) is. Ezáltal a tanulók megsejthetik, hogy a morzejelek tulajdonképpen pontokból és vonalakból készített sorozatok.

A következő feladat megoldása további gyakorlási lehetőség a fenti összeszámlálási módszer alkalmazására és a sorozatokkal kapcsolatos sejtés megerősítésére. Itt azonban 3 elemből készíthetünk 4 tagú tippeket (tippsorozatokat). Ha a tanulók (akár néhány konkrét „szelvény" elkészítése alapján) felismerik a hasonlóságot az előző feladattal, bizonyára a fagráffal történő összeszámlálással kísérleteznek. Eközben rá kell jönniük arra, hogy nem érdemes (és nem is lehetséges) az összes esetet berajzolni. Ezért inkább — az elkezdett gráfból felismert összefüggés (miszerint minden különböző tippsorozat 3-féleképpen folytatható tovább) alapján — számtáblázat készítése a célszerű.

Ennek kitöltését a tanulók önállóan végzik.

Ennyi tipp közül választhatnak	3	3	3	3
Ennyi mérkőzésre tippelhetünk	1	2	3	4
Ennyi a lehetőség	3	3^2	3^3	3^4

A táblázat kitöltése után nyilvánvalóvá válik a feladat kérdésének megválaszolása: nem biztos, hogy lesz telitalálat, hisz a szelvények száma (59) kisebb, mint az összes lehetőség száma (81).

A feladat megoldásához kapcsolódhat egy újabb kérdés: hány szelvényt kellene kitölteni az „igazi" totón ahhoz, hogy biztosan legyen 13+1 találatunk.

Az eredmény meghatározásához a tanulók folytathatják a számtáblázat kitöltését és megállpíthatják, hogy a három különböző elemből (1, 2, x) készíthető 14 tagú tippsorozatok száma 3^{14}. (Ez az eredmény természetesen csak akkor mond igazán valamit, ha nagyságrendjét megbecsültetjük a tanulókkal.)

A negyedik feladat megoldása már eléggé előkészített, ezért az azonos matematikai tartalom felismertetése után csupán a változók (paraméterek) különbözőségére célszerű rákérdezni. Ugyanis bizonyos megtévesztést okozhat a telefonszámok első jegye, mert az mindegyiknél állandó (egyes). Így célszerű azon helyek számát meghatározni először, amelyek a 10 számjegy mindegyikét felvehetik.

A megoldásban már teljes önállóságot kérünk a tanulóktól, ami feltételezi, hogy a számtáblázat feliratait is maguk tervezzék meg.

Ennyi számjegyet használunk fel	10	10	10	10	10
Ennyi jegyűek a telefonszámok	1	2	3	4	5
Ennyi a lehetőség	10	10^2	10^3	10^4	10^5

A táblázat vizsgálata alapján világossá válik a tanulók számára, hogy 1000 és 10 000 közötti előfizető esetén — 10 számjegyet feltételezve — 4 jegyű számsorozatok szükségesek ahhoz, hogy minden előfizetőnek más-más telefonszáma legyen. Ha ehhez hozzászámítjuk az állandó első jegyet (az egyest), adódik, hogy 5 jegyűek a telefonszámok.

A táblázatok összefoglaló áttekintése — és más feladatok megoldásához hasonlóak készítése — lehetőséget ad arra, hogy a tanulók felismerjék: n különböző elemből készíthető összes k elemű (ismétléses) sorozatok száma n^k.

Ez a felismerés itt még nem feltétlenül követelmény. Azonban a megoldási tapasztalatok felhalmozódása 7. és 8. osztályban már kell, hogy megérlelje az alapvető minőségi változást: a tanulók a táblázatokban rejlő összefüggéseket nemcsak felismerni, hanem megmagyarázni, logikusan indokolni is tudják. Ez az absztrakciós szint biztosíték arra, hogy a középiskolai tanulmányokban a kombinatorikus törvényszerűségek formalizált változatai, a képletek kellőképpen megalapozottak, és az élet különböző területein eredményesen felhasználhatók lesznek.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve III.* OPI. 1978.
[2] *Matematika-munkalapok. Általános iskola 5. osztály.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[3] *Matematika-munkalapok. Általános iskola 6. osztály.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
[4] *Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

ÚJVÁRI ISTVÁN
szakközépiskolai tanár
Vác

Új matematika tankönyvek a felnőttoktatásban

A dolgozók középiskoláiban folyó matematikaoktatás színvonaláról meglehetősen egységes a pedagógustársadalom véleménye. A nem kielégítő nívót előidéző okok közé azonban az önkritikus tanár saját — a felnőttoktatáshoz nem kellően igazodó — módszereit is besorolhatja a hallgatók tanulási problémái és a kevéssé alkalmas tankönyvek mellé. Mindhárom ok természetesen összefügg:

A felnőttoktatás problémái visszavezethetők

a tanárok módszertani hiányosságaira, a hallgatók érdeklődésének és tanulási technikájának alacsony fokára,

amelyeket a megfelelő tankönyvek hiánya még fokoz.

Tekintsük ezt az okfejtést *reverzibilisnek*. (Kellő optimizmussal megtehetjük.) Így:

Jobb tankönyv,

ehhez szükségszerűen igazodó, korszerűbb tanári módszerek: mely alkalmas a hallgatók érdeklődésének felkeltésére és az önálló tanulásra:

eredményesebb felnőttoktatás.

Ez a séma szabja meg a mondanivaló vázlatát:

1. Bemutatni egy új tankönyvet, mely — legalábbis a szerző hite szerint — az elődöknél jobban igazodik a felnőttoktatás sajátosságaihoz és alkalmas az önálló tanulásra.

2. Megfelelő módszereket ajánlani az esti- és levelező tagozatokon tanító kollégák számára.

3. Azokat az eszközöket felsorolni, amelyek a hallgatókat motiválhatják az önálló tanulásra.

[Az elmúlt tanévben egy, a folyó tanévben két új, I. osztályos tankönyvet kaptak a dolgozók középiskolái. (A D 12 502 számú a szakmunkások szakközépiskolája számára készült, szerzője: Czapáry Endre; a D 13 102 számú a dolgozók gimnáziumának tankönyve, szerzője: dr. Koller Lászlóné; a D 14 102 számúból a dolgozók 4 éves szakközépiskolájában tanulnak, szerzője: Újvári István). Ezen utóbbi tankönyv bemutatására kerül sor az alábbiakban.]

1. A tankönyv szerkezete

A 30 hétre bontott anyagból 20 az új ismereteket tárgyaló, 10 pedig felzárkóztató — összefoglaló — ismétlő jellegű.

Az új ismereteket nyújtó heti anyagrészek felépítése szorosan követi a matematikai ismeretszerzés fázisait, mely a megfigyelésekből levonható sejtésekkel kezdődik, a logikus lépésekben haladó következtetések megfogalmazásával folytatódik és az ismeretek alkalmazásával fejeződik be.

Az 1 hetes anyagrészek (fejezetek) 6 részre tagoltak. A matematikai ismeretszerzés egyes fázisainak 1—2—3 kisebb egység felel meg, így:

A matematikai tevékenység folyamata	Az új ismeretet feldolgozó fejezet részegységei
I. Megfigyelésekből levonható sejtések	1. Előkészítő feladatok
II. Logikus lépésekben haladó következtetés	2. Példák 3. A tapasztalatok összegezése
III. Az új ismeretek alkalmazása	4. Alkalmazás 5. Kiegészítések 6. Gyakorló feladatok

Ezeknek a részegységeknek a következő didaktikai funkciójuk van:

ELŐKÉSZÍTŐ FELADATOK

A felnőttek általában különböző ismeretekkel rendelkeznek. Mások a munkahelyi, szakmai tapasztalataik, különbözők a matematikai előismereteik. Az *ELŐKÉSZÍTŐ FELADATOK* célja az új anyag tárgyalásához szükséges tapasztalatok mozgósítása, a matematikai előismeretek azonos szintre hozása. De olyan feladatokkal is találkozunk itt, amelyek az új összefüggésekből sejtetnek meg valamit. Az *ELŐKÉSZÍTŐ FELADATOK* igen könnyű, de önálló válaszadást igénylő feladatok. Közismert tény, hogy az emlékezetben leginkább az az ismeret marad meg, amit egyéni töprengés, szellemi erőfeszítés hozott létre. Természetesen nem lehet arra számítani, hogy a felfedezés örömével együtt járó, de fáradságos utat mindenki követi.

PÉLDÁK

Bizonyára sokan kihagyják az első részt, s mindjárt a 2. egységgel, a „készétellel", a példákkal kezdik a tanulást. Kidolgozott példákon keresztül vezet az út az új matetikai fogalmak megalkotásához, kapcsolatok felismeréséhez. A konkrét esetekből adódó tanulságok már itt le vannak vonva, de általános érvényű megállapítások ritkán szerepelnek. Ezekre a következő részben, a

TAPASZTALATOK ÖSSZEGEZÉSE

című egységben kerül sor, röviden, tömören, általában egy-két oldalon. Ide kerülnek a definíciók, tételek és bizonyításuk, a legfontosabb tudnivalók, amelyeket meg kell tanulni. Mindegyik után zárójelbe tett sorszám utal vissza a konkrét példára. — A 4. rész az

ALKALMAZÁS,

a frissen tanult ismeretek összekapcsolása a gyakorlati élettel. Itt kerül sor a megismert módszer matematikai alkalmazására is. — Az 5. rész a

KIEGÉSZÍTÉSEK

A matematika iránt érdeklődők számára itt többnyire olyan problémák szerepelnek, amelyek a tanult módszerrel nehezen vagy egyáltalán nem oldhatók meg. Matematikatörténeti vagy egyéb érdekességek igyekeznek színessé tenni ezt az egységet, melyre nem épül szervesen a következő hét anyaga, ezért a kevés idővel rendelkező felnőtt hallgató kihagyhatja. (Ez a rész a könyvben apróbetűs.) A 6. rész a

GYAKORLÓ FELADATOK

A hét anyagának utolsó, de talán legfontosabb része. „Hallom és elfelejtem, — látom és megjegyzem, — csinálom és megértem" — tartja a matematikára különösen érvényes mondás. Biztos tudás csak akkor várható, ha ezeket a feladatokat, vagy legalábbis többségüket a hallgatónak sikerül önállóan megoldania. Fejezetenként kb. 1 oldal terjedelmű kitűzött feladat tartozik ide.

Világítsuk meg mindezt egy példával, a 10. hét anyagának, a Függvény fogalma című fejezetnek a feldolgozásával.

Előkészítő feladatokként halmazok elemei között kell megfeleltetéseket létrehozni, nyilak berajzolásával. A halmazok: különféle foglalkozások és ezek közismert munkaeszközei, Venn-diagrammal szemléltetve. A feladat azt sugallja, hogy majd kitüntetett szerepe lesz azoknak a hozzárendeléseknek, amelyeknél az *A* halmaz *minden* eleméből *pontosan* egy nyíl indul ki. Egy másik feladat különféle számhalmazok hozzárendelési szabályait segít megfogalmazni.

A Példák című egység 8 kidolgozott feladatot tartalmaz. Mindegyik egy-egy fontos fogalmat világít meg. Jórészt a mindennapi életből vett példákon keresztül ismerkedhetnek meg a hallgatók a hozzárendelés, az egyértelmű hozzárendelés, a függvény, az érték, az értékkészlet, az értelmezési tartomány fogalmával, a Venn-diagramos, nyíl-diagramos és derékszögű koordináta-rendszeres szemléltetési móddal.

A Tapasztalatok összegezése című egységben az említett fogalmak pontos meghatározása szerepel, tömören, egy oldalon, más betűtípussal szedve.

Az Alkalmazás című részben már az új fogalmakat használjuk ismét kidolgozott feladatokon keresztül. Szokatlan és meglepő lehet számukra, hogy függvény a ZÖLDÉRT-árjegyzék, a kötelező olvasmányok listája vagy a nyugdíjtáblázat is.

A Kiegészítés című egységben két témát tárgyalnak: „Néhány szó a függvényfogalmakkal kapcsolatos szóhasználatról" és „Adott függvény inverze" címmel.

A Gyakorlófeladatok között 8 kitűzött feladat szerepel.

Ezzel a feldolgozási móddal tehát minden fogalom, tétel, eljárás — mint például ebben a fejezetben a függvényfogalom — 6-féle feldolgozásban szerepel: kétszer kitűzött, kétszer kidolgozott feladatként, egyszer tömör megfogalmazásként, s egyszer bizonyos asszociációként. Mindez elegendő lehet a fogalom (tétel, eljárás) rögzítésére.

A tankönyv egyharmada — 10 fejezet — összefoglaló, ismétlő jellegű, felépítése más. Az 1—5. héten az általános iskolai anyag ismétlésére kerül sor, mégpedig nem halmazszemléletű megfogalmazásban, azért, hogy a régi ismeretek felidézését ne nehezítse a halmazzal együtt megjelenő seregnyi új fogalom és jel. Három újabb ismétlő fejezet az I. éves anyag nagy egységei, a függvények, az algebra és a geometria után következik, kettő pedig évvégi összefoglalásként. Ezek általában 3 részből állnak: igaz és hamis állításokból, írásbeli munkát nem igénylő kérdésekből és feladatokból, valamint összetettebb ismétlőfeladatokból. Elméleti összefoglalás nincs, mert felesleges; néhány oldallal előbb a „Tapasztalatok összegezése" c. egységek ezt pótolják.

2. Módszertani ajánlás

Számítani lehet arra, hogy az új anyag feldolgozásának ezt az újszerű módját nehezen szokják meg a könyvet használó tanárok, hiszen ez *eltér minden eddig forgalomban levő tankönyvtől.* A hallgatóknak azonban nem okozhat nehézséget, éppen az összehasonlítási alap hiányában. S a tankönyv elsősorban mégiscsak a felnőtt tanulók számára íródik. Az ilyen tankönyv funkciói közül legjelentősebb az *irányító jelleg.* Ne csak „alkalmas legyen" a tanulásra, hanem „kényszerítse is rá" a hallgatót a szükséges gondolatmenet végigjárására. A felnőttek tankönyve ne csak kiegészítője legyen a tanári munkának (mint a nappali tagozaton), hanem bizonyos mértékig helyettesítője is!

Ez csak tanári közreműködéssel sikerülhet. Ha a tanítási órán eddig a középpontban álló tanár *átadja helyét* a tankönyvnek. Ez a levelező (és a még meglevő néhány esti) tagozaton, ahol a hallgató hetente kétszer találkozik a matematikatanárával, a következőképpen történhet:

A hét 1. órájának második részében az Előkészítő feladatokat dolgozzák fel csoport- vagy osztálymunkával. Ennek alapján a tanár felhívja a figyelmet az anyag fontosabb csomópontjaira.

Az első otthoni tanulási szakaszban a hallgató feldolgozza a Példák, a Tapasztalatok összegezése és az Alkalmazás című egységeket. Ezek kidolgozott példák, illetve rövid, megtanulandó szöveges részek.

A hét 2. órája konzultációs jellegű. A tanár válaszol azokra a hallgatói kérdésekre, melyek az otthoni feldolgozás során felmerültek, majd kijelöli a Gyakorlófeladatokat.

A második otthoni tanulási szakaszban a hallgató a Gyakorlófeladatokkal foglalkozik.

A rákövetkező hét 1. órájának első részében ezeket a Gyakorlófeladatokat beszélik meg, tanári segítséggel.

Természetesen kétséges, hogy ezt az ajánlást az esti tagozatokon tanító kollégák mind be is tartják. A tanárok általában nem szeretik, ha a tananyag módszertani feldolgozását is előírják számukra. De azt is be kell látniuk, hogy a felnőttoktatás színvonalában csak akkor várható előrelépés, ha a tanárok is elfogadják az otthoni, önálló tanulási szakasz meghatározó szerepét.

Ha nemcsak annyiban építenek rá, mint amennyire ez a nappali iskolában szokásos. Ha ellenállnak annak a hallgatói kívánságnak, hogy „zanzásítva" adják le az anyagot, sőt: diktálják le a „lényeget". Ha kikényszerítik a hallgatókból a konzultációs kérdéseket. Amíg a pedagógus kollégák a tanulási-tanítási folyamatnak azt a szerkezeti sémáját alkalmazzák a dolgozók iskoláira is, amelyik a nappali tagozatra jellemző, addig a hallgató számára nincs intellektuális élmény, képességfejlesztés, csak a „sűrítmények" betanulása.

3. Eszközök a tanulói érdeklődés felkeltésére és ébren tartására

Alkalmas tankönyv és megfelelő módszerrel dolgozó tanár még nem biztosítéka a sikernek; tanulni vágyó hallgatók is kellenek. Ezért egyáltalán nem hátrány, ha egy tankönyv „érdekes". Mit jelent ez pontosan?

A tankönyvben igen sok az „életből vett" feladat, abból a meggondolásból, hogy a dolgozó ember fejében az marad meg, ami érdekli, s az érdekli, aminek hasznát látja társadalmi és munkatevékenységében. Ezért bőven szerepelnek termelési grafikonok, gazdasági táblázatok, telefonszámla, gépkocsi üzembentartási költsége, piaci árak stb.

A feladatok, feladatsorok között igen nagy számú a feleletválasztós jellegű (163 igaz-hamis állítás, 4 totórendszerű feladatsor). Ezek közismerten érdeklődést felkeltők, akárcsak az 1-1 db elágazós szerkesztésű programozott anyagrész és a blokksémás algoritmus, valamint néhány matematikatörténeti részlet.

A felnőttek számára írt tankönyv stílusának közelebb kell állnia egy ismeretterjesztő, mint egy tudatunkban élő matematika tankönyv stílusához. Ennek érdekében célszerű

— a tudományos pontosságot enyhíteni,
— a felesleges szinonimákat elkerülni,
— tudatosabb és kevesebb jelhasználatra törekedni,
— többet bízni a szemléletre.

A tankönyv ezeket a kezdeti törekvéseket már csak részben tükrözi. Főleg a szakmai bírálat kívánságára kellett változtatni ott, ahol az olvasmányosság, érdekesség, valamint a szigorúság, tömörség ellentmondó követelmények összhangját nem sikerült megteremteni.

Az ábrák a stílushoz igazodnak: világosak, könnyen áttekinthetők. A fényképek és illusztrációk az érdeklődést azonnal felkeltő hatásúak.

Végül: a könyv igen terjedelmes, 472 oldal. Vaskosságának oka egyrészt a sok kidolgozott feladat (a tankönyv önálló tanulásra való alkalmassága miatt), másrészt a sok kitűzött feladat. (A felnőtteknek nincsenek példatáraik.) Igen nagy luxus lenne azonban ezt a könyvet is kizárólag feladatgyűjteményként használni, mint azt elődjeivel oly sok kolléga tette. A tankönyv akkor lesz sikeres, ha beválik a *tanulás irányításának eszközeként*. Ez pedig akkor következik be, ha a tanárok „rendeltetésszerűen" használják és használtatják.

HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Beszámoló a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Dr. Hanga Mária művelődési miniszterhelyettes f. évi január 16-án dr. Szabolcsi Miklós akadémikushoz, az OPI főigazgatójához intézett átiratában közölte, hogy a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát hazánk rendezi meg 1982. július 5-től 14-ig. Erre 32 ország 4-4 versenyzőből és 2-2 vezetőből álló küldöttségét hívtuk meg. A 32 ország közül 26 az előbbi Diákolimpián is képviseltette magát, rajtuk kívül meghívást kapott még Algéria, Kuvait, Mongólia, a Német Demokratikus Köztársaság, Spanyolország és Vietnam is.

A Diákolimpia megrendezésének pénzügyi fedezetét a Művelődési Minisztérium biztosította, a rendezvény tartalmi és szervezési kérdéseinek megoldásáról, valamint lebonyolításáról az MM rendelkezése szerint az OPI-nak kellett gondoskodnia a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével, amelyet erre felkért a minisztérium.

Az előkészítő munkálatok irányítása céljából megalakult a Diákolimpia Szervező Bizottsága. Elnöke volt Császár Ákos, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem tanszékvezető egyetemi tanára; ügyvezető elnöke Hódi Endre, az OPI osztályvezetője; tagjai pedig: Reiman István, a matematikai tudományok kandidátusa, a Budapesti Műszaki Egyetem egyetemi docense; Székely György, az MM munkatársa; Tímár

András főosztályvezető, az OPI Külügyi Titkárságának vezetője és Vidák Imre, az OPI gazdasági igazgatója.

A Szervező Bizottság rendszeresen tartott ülésein elkészítette a Diákolimpia zsürijének és versenyzőinek programját, kijelölte a lebonyolításban kulcsfontosságú szerepet betöltő személyeket, biztosította a Diákolimpia résztvevőinek elszállásolását, étkezését, a verseny lefolytatásához, a társasági program megvalósításához szükséges személyeket, intézményeket, épületeket, felszereléseket, berendezéseket, szállító eszközöket, egyéb anyagi, illetve dologi feltételeket; ezenkívül kijelölte a reszortfelelősöket is.

Helyszűke miatt csak a jelentősebb feladatokat ellátó személyeket tudjuk itt felsorolni:

A nemzetközi zsüri elnöke Császár Ákos, titkára Hódi Endre volt. A magyar küldöttség vezetője Hódi Endre, helyettese Reiman István. A feladatkiválasztó bizottság elnöke és a zsüri szaktolmácsa dr. Pelikán József, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem egyetemi adjunktusa; a főkoordinátor Lovász László egyetemi tanár, az MTA levelező tagja volt. A minisztériumi ügyintézésért Székely György, az OPI-n belüli adminisztratív ügyintézésért Tímár András, a gazdasági ügyintézésért Landor Jánosné, a Külügyi Titkárság munkatársa, a gazdasági ügyintézés ellenőrzéséért Vidák Imre felelt.

A külföldi országok művelődési minisztereinek küldött meghívólevélben az állt, hogy a Diákolimpián részt vevő versenyzőknek az 1981—82. tanévben még középiskolai tanulóknak és 1962. július 1. utáni születésűeknek kell lenniük. A két kísérő tanár közül az egyik a küldöttség vezetője, a másik a vezető helyettese. Mindkét kísérő tanárnak beszélnie kell a Diákolimpia hivatalos nyelveinek (angol, francia, német, orosz) egyikét.

A küldöttség vezetőjének 1982. július 5-én, míg helyettesének és a négy versenyzőnek július 7-én kell Budapestre érkeznie. Hazautazásuk együtt történik július 14-én. Magyarországi tartózkodásuk idejére valamennyiüknek biztosítunk szállást, étkezést és zsebpénzt, de a Budapestre és onnan haza való utazás költségei a meghívott fél országát terhelik.

A levél címzettjét arra kértük, hogy legkésőbb március 1-ig értesítse az MM középfokú nevelési osztályát a meghívás elfogadásáról, annak a címnek a megadásával, amelyre a további információk küldését kéri. Végül azt kértük, hogy meghívásunk elfogadása esetén legkésőbb április 15-ig gondoskodjék a Diákolimpián kitűzésre javasolt 3-5 feladat szövegének és megoldásának megküldéséről a hivatalos nyelvek egyikén.

Három meghívott ország: Luxemburg, Mexikó és Spanyolország — különböző okok miatt — nem tudott eleget tenni meghívásunknak, a többiek azonban eljöttek, így ezen a Diákolimpián 5 világrész 30 államának összesen 119 ifjú matematikusa mérte össze tudását. (Algériát csak háromtagú csapat képviselte, mert a kiszemelt negyedik versenyző közvetlenül a Magyarországra indulás előtt betegedett meg.) Jelenleg tehát azzal dicsekedhetünk, hogy a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák történetében eddig a nálunk megrendezett XXIII.-on képviseltette magát a legtöbb ország.

Még az előkészület időszakában történt, hogy az UNESCO-nak egy munkatársa felkereste a magyar UNESCO-Bizottság elnökét és aziránt érdeklődött tőle, hogy milyen anyagi támogatással segíthetné az UNESCO az idei Diákolimpia megrendezését. Válaszunkban jutalmak, illetve ajándékok beszerzésére kértünk tőlük anyagi hozzájárulást, amit 2000 USA dollár összegben meg is kaptunk. Ez úton is köszönetünket fejezzük ki érte.

19 vendégküldöttség összesen csaknem 70 feladatjavaslatot küldött be a Diákolimpián való kitűzés céljából. A feladatkiválasztó bizottság átvizsgálta a beküldött feladatokat és azok megoldását, majd 6 feladatot, azaz egy teljes sorozatot készített elő belőlük azzal a rendeltetéssel, hogy ezt javasolja a zsürinek végleges kitűzésre, továbbá egy ún. tartaléksorozatot is állított össze, amely szintén 6 feladatot tartalmazott, végül még 8 további feladatot is készenlétbe helyezett esetleges cserék lehetőségének biztosítására. A teljes sorozatok összeállításakor a feladatkiválasztó bizottságnak szem előtt kellett tartania, hogy a bennük levő feladatok megoldásához szükséges matematikai ismeretek lehetőleg előforduljanak valamennyi résztvevő ország iskolai tanterveiben, a feladatok az iskolai matematika különböző témaköreiből valók legyenek, összességükben a matematika minél nagyobb területét fedjék le, megoldásuk bizonyos fokú leleményességet és magasabb képzettségi színvonalat követeljen a versenyzőktől, de azért legyen közöttük könnyebb is, közepes nehézségű és kifejezetten nehéz is.

Könnyebb feladatok kitűzésére azért volt szükség, hogy azoknak az országoknak a tanulói is juthassanak sikerélményhez, amelyek újabban kapcsolódtak be a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák küzdelmeibe, ezért versenyzőik várhatóan kevesebb eséllyel indultak; a nehéz feladatoknak pedig az volt a rendeltetésük, hogy „széthúzzák a mezőny elejét". Mindenképpen szerettük volna elkerülni az előbbi Diákolimpia eredményének megismétlődését, amikor is a versenyzők közül nagyon sokan: 26-an érték el a megszerezhető maximális pontszámot.

További szempont volt a feladatok előzetes kiválasztásakor, hogy a kitűzendő feladatok lehetőleg különböző küldöttségek javaslataiból származzanak; de ennél jobban kellett — és csakugyan kellett — ügyelni arra, hogy azok újak legyenek, ne olyanok, amelyek már megjelentek valamely ország szakfolyóiratában.

Az ezt követő lényeges események már magán a Diákolimpián történtek:

Amikor a küldöttségek vezetői július 5-én megérkeztek Budapestre, akkor a zsüri elnökével, a feladatkiválasztó bizottság elnökével és a zsüri másik szaktolmácsával együtt társasgépkocsin a zsüri kezdeti tevékenységének színhelyére, Ceglédre szállítottuk és ott a Dózsa György Középiskolai Kollégiumban szállásoltuk el őket. Ceglédi tartózkodásuk alatt itt is étkeztek.

A kollégiumba érkezésükkor a küldöttségek vezetői mindjárt megkapták tanulmányozás céljából a feladatkiválasztó bizottság által előzetesen kiszemelt 6+6+8 feladat szövegét a Diákolimpiának mind a négy hivatalos nyelvén, a feladatok megoldását pedig angolul. Este közös vacsora volt, amelyen a zsüri elnöke köszöntötte a vendégeket, akik közül sokan régi ismerősökként látták viszont egymást.

Július 6-án délelőtt volt a zsüri első ülése, amelyen a feladatkiválasztó bizottság elnöke ismertette a bizottság végzett munkáját, megindokolta az előzetes kiválasztás eredményét. A zsüri a közeli Kossuth Lajos Gimnázium dísztermében tartotta üléseit.

Utána Kovács Károly, Cegléd város tanácselnöke adott jól sikerült állófogadást a Diákolimpia küldöttségvezetőinek tiszteletére a városi tanács házasságkötő termében.

E nap délutánján még kétszer tartott ülést a zsüri: közülük az elsőn megtörtént a Diákolimpián kitűzendő feladatok végleges kiválasztása, a másodikon pedig a feladatok elosztása a két versenynapra, ezen belül sorrendjük megállapítása, majd a kifogástalan megoldásukra adandó pontszámok meghatározása.

Július 7-én folyamatosan érkeztek Ceglédre a küldöttségek helyettes vezetői, akik ugyancsak a Dózsa György Középiskolai Kollégiumban kaptak szállást, ezután pedig csatlakoztak a vezetők munkájához és egyéb programjához.

A zsüri délelőtti két ülésén történt meg a kiválasztott versenyfeladatok szövegének szabatos megfogalmazása a hivatalos nyelveken, majd pedig a feladatlapok formai előírásainak megállapítása.

Délután a zsüri már nem tartott ülést, hanem egyes tagjai a versenyfeladatok szövegét fordították a nemhivatalos nyelvekre; ezt követően megkezdődött a feladatlapok sokszorosítása. Azok számára, akik hamarabb fejezték be ezt a munkát, nem volt előírt foglalkozás: idejüket szabadon használhatták fel.

Július 8-án délelőtt még folytatódott és be is fejeződött a feladatlapok sokszorosítása. Ugyanekkor meghívás alapján három külföldi küldöttségvezető: Ion Cuculescu (Románia), Thomas Mühlgassner (Ausztria) és Szekeres György (Ausztrália) egy-egy rövid tájékoztatást adott a Bolyai János Matematikai Társulat kecskeméti Rátz László vándorgyűlésén az országukban folyó tanórán kívüli matematikai nevelésről. A többi küldöttségvezető és helyetteseik ismét szabadon rendelkezhettek idejükkel.

A délutáni program a küldöttségek vezetői, helyettes vezetői (és Cegléden tartózkodó családtagjaik) részére előbb egy pincegazdaság borpincéjének meglátogatásából, azután a Ceglédi Állami Gazdaság egyik üzemegységének megtekintéséből, végül egy termelőszövetkezeti vendéglőben feltálalt ünnepi vacsora elfogyasztásából állt. A résztvevők igen jó hangulatban tértek vissza szálláshelyükre.

Július 9-én reggel a vezetők és családtagjaik autóbusszal Budapestre utaztak, hogy részt vegyenek a Diákolimpia ünnepélyes megnyitásán, amelyre 8 óra 30 perces kezdettel a Kaffka Margit Gimnázium dísztermében került sor. Az ünnepélyen először Bakonyi Pál, az OPI főigazgató-helyettese beszélt, felsorolta azokat az országokat, amelyek elküldték versenyzőiket a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára és röviden méltatta a rendezvény jelentőségét a különböző társadalmi berendezkedésű államok békés egymás mellett élésének, valamint együttműködésének szempontjából. Utána Császár Ákos Köpeczi Béla akadémikus, művelődési miniszter nevében hivatalosan is megnyitotta a Diákolimpiát. Beszédében röviden áttekintette a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák múltját, jelentőségüket a tehetséges fiatal matematikusok képességeinek kibontakoztatásában, a különféle nemzetiségű ifjú matematikusok és tanáraik személyes kapcsolatainak kiépítésében és ápolásában, majd befejezésül sok sikert kívánt e nemes verseny résztvevőinek.

Ezután a 119 versenyző mindegyike elfoglalta a részére kijelölt helyet — hogy pl. azonos nyelvet beszélők ne kerüljenek egymás mellé —, felbontotta az asztalán levő borítékot, amely anyanyelvén tartalmazta az első napi három feladatot; ezzel ténylegesen is megkezdődött a verseny.

A résztvevők mindkét napon a verseny idejének első félórájában írásbeli kérdéseket tehettek fel a zsüri tagjainak a feladatok szövegének értelmezésével kapcsolatban. Ha a zsüri — egyhangúlag vagy szótöbbséggel — úgy határozott, hogy válaszol a feltett kérdésre, akkor ezt ugyancsak írásban tette meg. Egyébként a 3-3 feladat megoldására a versenyzőknek mindkét napon négy és fél órányi munkaidő állt rendelkezésükre.

A tanulók kérdéseire adott válaszok után a zsüri tagjai (és hozzátartozóik) az első versenynapon autóbuszos budapesti városnézésen vettek részt. A budapesti Latinka Sándor úti kollégiumban elfogyasztott ebéd után autóbusszal visszatértek Ceglédre, ahol megkezdték saját tanulóik első napi versenydolgozatának kijavítását, elbírálását. Utána volt az „utolsó vacsora" a ceglédi Dózsa György Középiskolai Kollégium ebédlőjében, egyszersmind búcsú attól az intézménytől, amely több, mint öt napon ke-

resztül adott kitűnő szállást és ellátást a zsüri tagjainak (valamint hozzátartozóiknak), ezért kissé fájó szívvel, de kellemes emlékekkel váltak meg tőle.

Július 10-én a reggeli után a zsüri tagjai és hozzátartozóik végleg elhagyták Ceglédet, autóbusszal Budapestre költöztek. Maguk a zsüritagok először a verseny színhelyére, a Kaffka Margit Gimnáziumba mentek, ahol a verseny első félórájában válaszoltak a tanulóknak a feladatok értelmezésével kapcsolatos írásbeli kérdéseire. A délelőtt további részében megtörtént a zsüri külföldi tagjainak és hozzátartozóiknak elhelyezése a Budapesti Műszaki Egyetem Schönherz Zoltán Kollégiumának előre lefoglalt szobáiban. Sajnos — vagy bizonyos szempontból szerencsére — a tervezetthez képest megnövekedett az érdeklődés a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia iránt, ami abban mutatkozott meg, hogy a vártnál több ún. kísérő személy is jött a Diákolimpiára. Ez azt eredményezte, hogy az előzetesen lefoglalt 34 szoba helyett 43-ra lett szükség, viszont a többletigényként jelentkező 9 szoba elfoglalására több óráig várni kellett. Ez érthető kellemetlenséget jelentett az érintett személyeknek még akkor is, ha a várakozás idejére gondoskodni tudtunk számukra megfelelő tartózkodási helyről és csomagjaik elhelyezéséről is.

E nap ebédjétől kezdve a zsüri tagjai és hozzátartozóik is a Latinka Sándor úti kollégium ebédlőjében kaptak naponta háromszori étkezést. Ebéd után folytatódott a saját tanulók versenydolgozatainak kijavítása, elbírálása, ezenkívül megkezdődött — külön ütemterv szerint — a koordináció munkája a Schönherz Zoltán Kollégium kijelölt helyiségeiben.

A koordinációnak az a rendeltetése, hogy a küldöttségek vezetőinek saját tanulóik versenydolgozatára vonatkozó értékelése után — a zsüritől független, jelen esetben magyar koordinátorok: megfelelő nyelvtudással rendelkező szakemberek közreműködésével — biztosítsa a feladatok megoldásának egyöntetű elbírálását. (A magyar tanulók dolgozatait azoknak a küldöttségeknek a vezetői koordinálták, amelyek az illető feladatot javasolták.)

Mielőtt rátérnénk a Diákolimpián kitűzött feladatok szövegének ismertetésére, röviden leírjuk, hogy mi történt azokkal a külföldi versenyzőkkel, akik július 7-én érkeztek Budapestre.

A repülőtérre, illetőleg valamelyik pályaudvarra való megérkezésük után a Latinka Sándor úti kollégiumba vittük őket, ahol megtörtént az elszállásolásuk, és július 7-i ebéddel kezdődően ugyanitt napi háromszori étkezésben is részesültek. (Az utazási körülmények miatt korábban érkezők — és később távozók — elszállásolásáról és étkeztetéséről külön gondoskodtunk.) Ezen a napon — az érkezések különböző időpontja miatt — a versenyzőknek nem volt szervezett programja.

Július 8-án a versenyzők délelőtt autóbuszos városnézésen vettek részt. Délután szabad programjuk volt, nem utolsósorban azért, hogy akklimatizálódhassanak, hiszen 5 világrészből érkeztek.

Mint tudjuk, a következő két nap délelőttjén zajlottak le maguk a versenyek. Ezeken a napokon délután szabad programjuk volt a versenyzőknek, egyrészt, hogy kipihenjék fáradalmaikat, másrészt, hogy felkészülhessenek a következő napi próbatételre.

A XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött feladatok magyar szövege:

Első nap

1. Az f függvény a pozitív egész n számokon van értelmezve, értékei nemnegatív egész számok. Minden m, n értékre

$$f(m+n)-f(m)-f(n) = 0 \quad \text{vagy} \quad 1,$$

$$f(2) = 0,\ f(3) > 0 \quad \text{és} \quad f(9999) = 3333.$$

Meghatározandó f (1982).

2. Egy $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú; oldalait jelöljük a_1-gyel, a_2-vel, a_3-mal (a_i fekszik A_i-vel szemben)! Minden i-re ($i=1, 2, 3$) M_i az a_i oldal felezőpontja; T_i az a pont, amelyben a beírt kör érinti a_i-t; végül S_i a T_i pont tükörképe az A_i-hez tartozó belső szögfelezőre nézve.

Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2 és M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek keresztül!

3. Tekintsük a következő tulajdonságú valós (x_n) számsorozatokat:

$$x_0 = 1, \quad \text{és} \quad i \geqq 0 \quad \text{esetén} \quad 0 < x_{i+1} \leqq x_i.$$

(*a*) Bizonyítandó, hogy minden ilyen sorozathoz van olyan $n \geqq 1$, amelyre

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3{,}999.$$

(*b*) Adjunk meg egy ilyen sorozatot, amelyre minden n esetén

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

Második nap

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n olyan pozitív egész szám, amelyre az

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

egyenletnek van egész számokból álló (x, y) megoldása, akkor legalább három ilyen megoldása van!

Mutassuk meg, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása, ha $n = 2891$.

5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és CE átlóit a belső M, illetve N pont úgy osztja fel, hogy

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Határozzuk meg r-et, ha tudjuk, hogy B, M és N egy egyenesen fekszik!

6. Legyen S egy négyzet, amelynek oldalhosszúsága 100; és L egy S-ben fekvő, önmagát nem metsző (azaz többszörös pont nélküli) töröttvonal, amely az A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ szakaszokból áll, ahol $A_0 \neq A_n$. Tegyük fel, hogy az S négyzet határának minden P pontjához van L-nek olyan pontja, amelynek P-től való távolsága nem nagyobb $\frac{1}{2}$-nél!

Bizonyítandó, hogy van L-en olyan X és Y pont, amelyeknek távolsága egymástól nem nagyobb 1-nél, és L-nek X és Y közötti része legalább 198 hosszúságú!

A feladatok rendre az angol, a holland, a szovjet, az angol, a holland és a vietnami küldöttség javaslatai közül valók voltak. Mindegyik feladat helyes megoldásáért egyaránt 7 pontot kaptak a versenyzők. Egy-egy tanuló tehát maximálisan 42 pontot szerezhetett, míg egy 4 főből álló csapat legfeljebb 168 pontot érhetett el.

Hazánkat a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián a következő versenyzők képviselték:

1. **Csákány Rita,** a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója;

2. **Károlyi Gyula,** a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója;

3. **Szabó Endre**, a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója;

4. **Tardos Gábor,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályos tanulója.

Az osztályok megjelölése az 1981—82. tanévre vonatkozik. A tanulók sorszáma megegyezik a későbbi táblázatainkban találhatókkal.

A magyar tanulókat ebben az évben is Reiman István készítette fel a versenyre. A felkészítéshez a vidéki központi szakkörök tevékenysége is hozzájárult. A Diákolimpián részt vevő tanulók személyére a különféle hazai és nemzetközi matematikai tanulmányi versenyeken elért eredményük, a felkészülés során nyújtott teljesítményük és az ellenőrző dolgozatok, valamint a felkészítés záródolgozatának eredménye alapján Hódi Endre és Reiman István tett közös javaslatot az MM Középfokú Nevelési Főosztályának.

E kis kitérő után térjünk vissza a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia további eseményeinek ismertetésére!

Július 11-én egész napos autóbusz-kiránduláson vettek részt felnőttek és diákok együttesen. Az úticél a zánkai Balatoni Úttörőváros volt. A kirándulók odaérkezésük után tízórait kaptak, majd megtekinthették az Úttörőváros különféle épületeit, létesítményeit, kiállításait. Ebéd után fürdést terveztünk a Balatonban. Ez azonban csak azoknak a keveseknek sikerült, akik már ebéd előtt megmártóztak a hűs hullámokban, mert a meteorológiai szolgálat vihart jelzett, emiatt nem lehetett igénybe venni az Úttörőváros fürdőtelepét. Így sokan csalódottan és duzzogva szálltak be az eredetileg tervezettnél jóval korábban visszainduló autóbuszokba. Bosszúságukat később az enyhítette, hogy az autóbuszokból — tehát biztos fedezékből — szemlélhették a nemsokára elkezdődött, igen nagy felhőszakadást, amely ezúttal igazolta a meteorológiai előrejelzést. Szálláshelyükre visszaérkezve azután megnézhették televízión a labdarúgó világbajnokság döntőjét is ...

Amíg július 12-én a tanulók — most már végképp megszabadulva a verseny izgalmaitól — visegrádi hajókiránduláson vettek részt, amely szerencsére lényegesen jobban sikerült az előző napi kirándulásnál, addig a zsüri tagjaira és a koordinátorokra igen nehéz munka várt: délelőtt folytatniuk kellett és délután be is kellett fejezniük a 10-én délután éppen csak megkezdett koordinálást. A rendelkezésre állt idő nem volt soknak mondható az elvégzendő feladat mennyiségéhez mérten. Koordinátoraink ügyességét, felkészültségét és lelkes, jó munkáját dicséri, hogy feladatukat nemcsak megfelelő szakmai tudással és nyelvismerettel, részrehajlás nélkül, továbbá — ami talán a legfontosabb — kellő szigorúsággal, hanem időre is el tudták végezni, be tudták fejezni.

	1.	2.	3.	4.	S	I.	II.	III.	S'
Német Szövetségi Köztársaság	42	35	31	37	145	2	2	—	4
Szovjetunió	37	42	30	28	137	2	1	1	4
Egyesült Államok	40	35	29	32	136	1	2	1	4
Német Demokratikus Köztársaság	37	40	27	32	136	2	1	1	4
Vietnam	42	30	32	29	133	1	2	1	4
Magyarország	21	36	33	35	125	—	3	1	4
Csehszlovákia	29	21	31	34	115	—	2	2	4
Finnország	16	35	28	34	113	—	2	1	3
Bulgária	26	29	26	27	108	—	—	4	4
Nagy-Britannia	23	23	28	29	103	—	—	4	4
Románia	26	14	26	33	99	—	1	2	3
Jugoszlávia	30	20	18	30	98	—	2	—	2
Lengyelország	30	23	16	27	96	—	1	2	3
Hollandia	17	22	34	19	92	—	1	1	2
Franciaország	38	17	14	20	89	1	—	—	1
Ausztria	11	11	38	22	82	1	—	1	2
Kanada	14	12	23	29	78	—	—	2	2
Izrael	22	18	17	18	75	—	—	1	1
Svédország	23	15	11	25	74	—	—	2	2
Ausztrália	20	23	10	13	66	—	—	1	1
Brazília	24	10	19	13	66	—	—	1	1
Mongólia	21	12	13	10	56	—	—	1	1
Görögország	14	19	9	13	55	—	—	—	—
Belgium	7	2	22	19	50	—	—	1	1
Kuba	17	7	17	3	44	—	—	—	—
Kolumbia	3	9	18	4	34	—	—	—	—
Algéria	11	10	2		23	—	—	—	—
Venezuela	11	10	1	1	23	—	—	—	—
Tunézia	7	8	1	3	19	—	—	—	—
Kuvait	2	1	1	0	4	—	—	—	—
					Σ	10	20	31	61

A zsüri utolsó ülésére a vacsorát követően került sor a Schönherz Zoltán Kollégium földszinti nagytermében. Az ülés megkezdését érthetően izgalomteljes várakozás előzte meg, hiszen itt kellett eldönteni a koordináció során függőben maradt kérdéseket — ti. amikor a koordinátorok véleménye nem egyezett meg valamelyik küldöttség vezetőjével. A versenyzők pontszámának végleges megállapítása és lezárása után ezen az ülésen kellett megvonni az egyes díjak odaítéléséhez szükséges pontszámhatárokat annak figyelembevételével, hogy az I., II. és III. díjasok számának aránya közelítően 1:2:3 legyen, továbbá a versenyzőknek kb. fele részesüljön díjazásban. Utolsó programpontként lehetőség szerint a XXIV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia helyszínének kijelölése szerepelt.

A várakozás feszültségét némileg oldotta, hogy a küldöttségek vezetői nagyrészt ekkor adták át egymásnak szánt ajándékaikat. Mindössze néhány kérdés maradt függőben a koordinálás után. Ezek ismertetése és megvitatása után a zsüri minden esetben nagy többséggel a koordinátorok javaslata mellett foglalt állást. Miután így véglegessé váltak a versenyzők pontszámai, a zsüri elnöke azt javasolta, hogy azok a versenyzők részesüljenek I. díjban, akik legalább 37 pontot szereztek; II. díjat azok kapjanak, akiknek pontszáma legalább 30, legfeljebb pedig 36 volt; végül azok a tanulók legyenek III. díjasok, akik legalább 21, de legfeljebb 29 pontot értek el. A zsüri megvitatta ezt a javaslatot is, majd részletekben szavazott az egyes pontszámhatárok elfogadásáról, végül minden részletében megerősítette az elnök javaslatát; igaz, hogy az I. és II. díj közötti pontszám esetén minimális szótöbbséggel.

Első táblázatunkban azt tüntettük fel, hogy a résztvevő országok tanulói által szerzett összes pontszámok (S) csökkenő, ill. nem növekvő sorrendjében hány pontot értek el az egyes tanulók (1., 2., 3. és 4. sorszámmal jelölve), hány I., II. és III. díj jutott egy-egy küldöttségnek, végül az utolsó oszlop a díjak összegét (S') mutatja szintén országonként, míg a Σ-val bevezetett utolsó sorban az egyes díjak számát és az összesét összegeztük.

Második táblázatunk arról tájékoztat, hogy a magyar tanulók hány pontot szereztek az egyes feladatokra adott megoldásukkal, mennyi lett ennek alapján összpontszámuk, és ezzel milyen díjat nyertek.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	összes	
	feladatra kapott pontszám							
1. Csákány Rita	2	6	4	0	7	2	21	III. díj
2. Károlyi Gyula	7	7	7	7	7	1	36	II. díj
3. Szabó Endre	7	7	2	3	7	7	33	II. díj
4. Tardos Gábor	7	2	7	5	7	7	35	II. díj

A díjazásban részesítendő versenyzők kijelölésével a zsüri lényegében befejezte érdemi munkáját. Utolsó ülésén ezután az elnök rövid szakmai értékelést adott a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról, majd megköszönte a zsüri tagjainak eredményes és baráti légkörben lefolytatott munkáját.

Ami a következő Diákolimpia helyszínének kijelölését illeti, ezzel kapcsolatban Claude Deschamps, a párizsi Louis le Grand líceum tanára, a francia küldöttség vezetője tett bejelentést. Bejelentésében, amely előzetes közlésnek tekintendő, arról tájékoztatta a jelenvoltakat: több, mint valószínű, hogy a francia Oktatási Minisztérium 1983-ban megrendezi a XXIV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát. A hivatalos meghívót a kialakult szokásnak megfelelően a meghívandó államok oktatási (művelődési) minisztériumai fogják megkapni. A francia küldöttség vezetőjének ezt a bejelentését a zsüri tagjai nagy tapssal üdvözölték. Ezt követően a későbbi néhány év Nemzetközi Matematikai Olimpiájának megrendezésére vonatkozólag is jelentettek be többé-kevésbé bizonyosnak tekinthető elhatározásokat egyes küldöttségek vezetői; ezekre a bejelentésekre még visszatérünk a továbbiakban. Így zárult a zsüri utolsó ülése.

Július 13-án délelőtt általában szabad programjuk volt a Diákolimpia résztvevőinek: felnőtteknek és diákoknak egyaránt — néhány felnőtt kivételével, akik a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák helyszínére javaslatot tevő bizottság (angolul: International Mathematical Olympiad Site Committee, rövidítve: IMO-SC) 10 óra 30 perckor kezdődött ülésén vettek részt a Schönherz Zoltán Kollégium földszinti nagytermében.

A bizottság ülésén jelen voltak: Dr. Bernhard Neumann (Ausztrália) elnök, Dr. Henry L. Alder (Egyesült Államok) ügyvezető elnök, John Hersee (Nagy-Britannia) titkár; Dr. Jan van de Craats (Hollandia), Dr. Ion Cuculescu (Románia), Hódi Endre (Magyarország) és Mgr. Andrzej Mąkowski (Lengyelország) tagok; rajtuk kívül meghívás alapján: Dr. Samuel L. Greitzer és Dr. Murray Klamkin (Egyesült Államok), Dr. Matti Lehtinen (Finnország), Dr. Lars-Åke Lindahl (Svédország) és James Williams (Ausztrália).

Az ülés résztvevői többek között áttekintették és értékelték azokat a bejelentéseket,

amelyek a zsüri előző esti ülésén hangzottak el a következő évek Nemzetközi Matematikai Olimpiái megrendezésének szándékára vonatkozólag. Röviden összesítve az 1983. évi Diákolimpiát Franciaország, az 1984. évit Csehszlovákia kívánja megrendezni. Az 1985. évi Diákolimpia megrendezését Finnország tervezi, 1986-ban három ország is: Kolumbia, Lengyelország és Svédország is szóba jöhet a Diákolimpia vendéglátó államaként; elképzelhető, hogy közülük Lengyelország vagy Svédország rendezi az 1987. évit — amelyre egyelőre még nincs vállalkozó—, ha tisztázódik az 1986. évinek a helyszíne. 1988-ra Ausztrália jelentette be előzetes megrendezési szándékát, mivel ebben az esztendőben ünneplik Ausztrália fennállásának 200 éves jubileumát.

Bár az ismertetett rendezési szándékok egyike sem tekinthető még teljesen bizonyosnak, a bizottság mégis örömmel nyugtázta, hogy a helyzet ebben a tekintetben lényegesen jobb az egy évvel korábbinál, amikor csak egy feltételes bejelentés történt a következő évi Diákolimpia megrendezésére (igaz, hogy az azóta már megvalósult!), most pedig tulajdonképpen az előttünk álló hat esztendő mindegyikében akadt vállalkozó a Diákolimpia lebonyolítására.

A délelőttel szemben a délután már bővelkedett programban: a Diákolimpia záróünnepélye 16 órakor kezdődött a Kertészeti Egyetem dísztermében, előtte 15 óra 30 perces kezdettel dr. Hanga Mária reprezentatív állófogadást adott a Diákolimpián részt vevő küldöttségek vezetőinek tiszteletére ugyanannak az épületnek II. emeleti rektori tanácstermében.

A záróünnepélyt Szabolcsi Miklós akadémikus nyitotta meg. Utána Szokolay Balázs, fiatal zongoraművészünk adott elő egy zenedarabot nagy sikerrel. Ezt követően Császár Ákos szervezési és főleg szakmai szempontból értékelte a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát. A verseny magas színvonalára jellemző, hogy a 119 versenyző közül mindössze háromnak sikerült megszereznie a lehetséges legtöbb pontot. A kitűzött feladatsorozat kiegyenlített voltára utal az a tény, hogy az elérhető összes pontszámnak legalább a felét a versenyzőknek alig valamivel több, mint fele szerezte meg. A koordinátorok jó munkáját a külföldi küldöttségek vezetői is elismerték mondván, hogy az utóbbi Diákolimpiákon tapasztaltakhoz képest szigorúbb mércét alkalmaztak, de elbírálásuk egyöntetű voltát — az egyes feladatokban —, továbbá elfogulatlanságukat nem vitatták. Mindezek alapján Császár Ákos örömmel minősíthette sikeresnek szakmai szempontból a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát.

A lebonyolításba — sajnos — már csúsztak be hibák helyenként, hiába volt kellően átgondolt és körültekintő az előkészítő munka, valamint fáradtságot nem ismerő egyes szervezők tevékenysége. Imitt-amott előbukkantak a ránk jellemző hibák: hol sokan voltunk — amikor rendelkezni kellett, hol meg kevesen — amikor végre kellett hajtani valamit. Mentségünkre szolgáljon, hogy a menet közben adódott nehézségek egy része a Diákolimpiára előzetes bejelentés nélkül érkezett kísérő személyek létszámnövelő szerepének tudható be, azonkívül ezek a zökkenők nem befolyásolták döntően sem a Diákolimpia lefolyásának menetét, sem a résztvevők hangulatát.

Dr. Hanga Mária ünnepi beszédében először röviden a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák történetével, majd szakmai és politikai jelentőségükkel foglalkozott. Lényegesnek tartotta, hogy minden esztendőben sor kerüljön ilyen nemzetközi verseny megrendezésére, és ne ismétlődjék meg az, ami 1980-ban történt, amikor is egyetlen ország sem vállalkozott a Diákolimpia megtartására. Hogy a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák eszméje napjainkban is folyamatosan teret hódít, annak bizonyítéka egyfelől a mostani Diákolimpián részt vevő küldöttségek száma: 30, ami ebben a tekintetben új rekordot jelent, másfelől hogy ez alkalommal is üdvözölhettünk olyan küldöttséget, mégpedig Kuvait állam küldöttségét, amely első ízben vett részt Diákolimpián.

A résztvevő országok számának örvendetes növekedése azonban szükségszerűvé tette az egyes küldöttségek létszámának csökkentését. A magyar Művelődési Minisztérium — figyelembe véve, hogy már tavaly is és idén is mind az öt világrészből érkezett küldöttség a Diákolimpiára, ami a rendező államtól távoli országok esetében az egyébként is megdrágult utazási költségek jelentékeny mértékű növekedéséhez vezetett — az egyes küldöttségek versenyzőinek létszámát a korábbi 8-ról 4-re szállította le. A csökkentés ténye kevésbé, de mértéke több szakembert eléggé meglepett hazánkban is, külföldön is. Bár elképzelhető, hogy hat versenyzőből álló csapatokkal szemben talán mindenki véleménye egyetértő lett volna, meg kell azonban mondanunk, hogy utólag kevesebb negatív észrevétellel találkoztunk ezzel kapcsolatban, mint amennyire kezdetben gondoltunk. Dr. Hanga Mária beszédében mint *egy* lehetséges változatát említette a következő Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák megrendezésének is ezt a létszámkeretet.

Ezután Császár Ákos átadta a díjazott versenyzőknek díjaikat és okleveleiket, amelyekhez tárgyi ajándékokat is kaptak. Végül a többi versenyző is kapott olyan emléklapot, amely a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián való részvételét tanúsította — megfelelően Pierre Coubertin emlékezetes mondásának, amelyet az újkori olimpiai játékokkal kapcsolatban jelentett ki, hogy ti. „nem a győzelem, hanem a részvétel fontos". (Ezt a zsüri elnöke idézte beszédében.)

A záróünnepély a magyar himnusszal fejeződött be.

A Diákolimpia búcsúvacsorája este 20 órakor kezdődött a Hotel Ifjúság egyik különtermében. A szálláshelyükről ide és innen vissza szálláshelyükre autóbuszok szállították a résztvevőket. A hangulatos összejövetel bizonyára sokáig emlékezetes marad minden jelenvoltnak. Most már mindenkinek felszabadult a kedélye: versenyzőknek és vezetőiknek, külföldi vendégeknek és hazai szervezőknek, lebonyolítóknak. Ehhez nagymértékben hozzájárult a szép környezet, kilátás a Dunára és az esti Budapestre, a jó ételek, italok és a Rajkózenekar kulturált muzsikája.

A vacsora „hivatalos" eseményei közül elsőként említjük Bakonyi Pálnak, az OPI főigazgató-helyettesének pohárköszöntőjét, amelyre a vendégküldöttségek vezetői közül a francia Claude Deschamps tanár válaszolt, megköszönve a Diákolimpia szervezőinek és lebonyolítóinak áldozatos munkáját, majd megismételte országa Oktatási Minisztériumának a következő évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia megrendezésére irányuló szándékáról a zsüri utolsó ülésén tett bejelentését; ez — érthető okokból — most még nagyobb lelkesedést váltott ki.

A vacsora folyamán adta át Mansour M. Hussain, a kuvaiti küldöttség vezetője országának ajándékát azoknak a versenyzőknek, akik megszerezték a maximális 42 pontot. Ez a három versenyző az NSZK-beli Bruno Haible, a szovjet Grigorij Perelman és a vietnami Le Tu Quoc Thang volt; és személyenként egy-egy, japán gyártmányú, nagyobb teljesítményű számológépet kaptak ajándékba.

Az est fénypontját jelentette az a „nemzetközi kánkán", amelyet Simonyi Gábornak, a tavalyi Diákolimpia magyar aranyérmesének irányításával és a Rajkózenekar kíséretével mutattak be a táncos lábú versenyzők — mindvégig megmaradva a jó ízlés határain belül. Ezek után nem csoda, hogy a búcsúvacsora résztvevői igen jó hangulatban tértek vissza szálláshelyükre.

A küldöttségek zöme másnap hazautazott, csak azok maradtak tovább egy-két nappal, akiknek várakozniuk kellett a megfelelő közlekedési eszközre. Úgy tűnt, hogy vendégeink rövid magyarországi tartózkodásuk után kellemes emlékekkel gazdagodva és látogatásukkal elégedetten tértek vissza hazájukba.

A Diákolimpia értékelésére vonatkozólag már az előbbiekben is többször tettünk megállapításokat. Befejezésül ezeket szeretnénk még kiegészíteni.

A Diákolimpia szakmai sikere jelentékeny részben Császár Ákos, a zsüri elnöke; Pelikán József, a feladatkiválasztó bizottság elnöke, a zsüri szaktolmácsa és koordinátor; valamint Lovász László főkoordinátor kiemelkedő tevékenységének köszönhető. Közülük is elsősorban Pelikán József nagy nyelvtudásán múlott, hogy ezen a Diákolimpián a zsüri ülésein meg tudtuk valósítani azt, amit eddig még nem sikerült: ha különösebb ok nem volt rá, akkor a zsüri tanácskozása — időkímélés céljából — angolul folyt; olyankor azonban, amikor szavazni kellett valamely kérdésben, akkor az eldöntendő kérdést mindig világosan megfogalmazta mind a négy hivatalos nyelven. Félreértésről tehát gyakorlatilag nem lehetett szó.

Néhány szót a magyar versenyzők teljesítményének értékeléséről. A négytagú magyar együttes összes pontszám tekintetében a hatodik helyet szerezte meg; három versenyző ért el második, egy pedig harmadik díjat. Arra való hivatkozással azonban, hogy diákjaink a korábbi esztendőkben igen sokszor jobb eredménnyel kényeztettek el bennünket, többen úgy fogalmaztak, hogy a magyar tanulóknak a XXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián való szereplésére nemigen lehetünk büszkék.

Az nyilvánvaló, hogy az első, második, ..., ötödik hely jobb a hatodiknál; és az is, hogy az I. díj többet ér a II.-nál stb. De pl. az már nem mindegy, hogy egy csapat 30 közül szerzi meg a hatodik helyet, vagy — mondjuk — 15 közül. És még valamit: nemcsak hazánkban, de a mienkénél sokkal nagyobb lélekszámú országokban is mutat bizonyos mértékű ingadozást a legjobb matematikus diákok teljesítményének szintje. Ezért egy adott teljesítmény megítélésében akkor járunk el helyesen, ha valakinek az eredményét saját korábbi, hasonló körülmények között elért eredményeivel vetjük egybe. Nos, ha ezt tesszük, akkor azt kell mondanunk, hogy versenyzőink százalékos teljesítménye jobb volt a Diákolimpián, mint a felkészítés időszakában, év közben íratott ellenőrző dolgozatok esetében.

Sok egyébre is hivatkozhatnánk: pl. hogy a Német Szövetségi Köztársaságban nem 12, hanem 13 évig járnak iskolába a gyermekek érettségi előtt. Vagy: ne csupán azokat az országokat nézzük, amelyeknek küldöttsége megelőzött bennünket, hanem azokat is, amelyeket a mieink előztek meg! Pl. Csehszlovákia, Nagy-Britannia, Lengyelország, Franciaország stb. csapatát legyőzni nem elismerésre méltó-e?

Úgy véljük, hogy ilyen és ehhez hasonló elemzéseket mindenképpen el kell végeznünk, de a további részletezés már túlmegy ennek a beszámolónak a keretein.

A következő Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákra való felkészülést lényegében ugyanolyan módon véljük célszerűnek folytatni, mint ahogyan az az utóbbi években történt: alapozva a központi olimpiai szakkörök, különösen pedig az Ifjúsági Matematikai Kör munkájára; figyelembe véve a különféle hazai versenyeken — és esetleg az ún. amerikai versenyen — elért eredményeket; az egész tanév folyamán rendszeresen foglalkoztatva a felkészítésre kiszemelt tanulókat minél több régi olimpikon bevonásával; a Diákolimpia versenyeinek megfelelő ellenőrző dolgozatok íratásával; az év közi, főként pedig a tanév befejezését közvetlenül követő

intenzív felkészítő szakaszokkal. Nem tartunk helyesnek azonban olyan felkészítési eljárásokat — pl. előre hozott érettségi vizsga letétele után több hónapos „bepaukolást" —, amelyek esetleg vezethetnek ugyan sikeres olimpiai szereplésre, de hosszabb távon feltétlenül károsan hatnak az ilyen felkészítésben részesített ifjú matematikusok szakmai és általános fejlődésére. Mi ugyanis nem célnak tekintjük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát, hanem fontos eszköznek a tehetséges fiatal matematikusok képességeinek fejlesztésére, kibontakoztatására.

KAMARÁS LAJOS—PÓLA JÓZSEF
főiskolai docens főiskolai adjunktus
Pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem

Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1982. évi matematikai tanulmányi versenyéről I.

A versenyt ez évben április 19-én és 20-án a Pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem Tanárképző Karán rendezték. A Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének felkérése alapján a versenybizottság elnöke Hódi Endre, titkára Póla József, tagjai Kamarás Lajos, Pogáts Ferenc, Rozgonyi Tibor, Sebestyén József, dr. Szepessy Bálint és Szerényi Tibor voltak. A vendéglátó intézményen kívül a Ho Si Minh Tanárképző Főiskolát (Eger), a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola kihelyezett tagozatát (Budapest), a Bessenyei György Tanárképző Főiskolát (Nyíregyháza), a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolát (Szeged), valamint a Szombathelyi Tanárképző Főiskolát a versenyen 5-5 hallgató képviselte.

Az írásbeli feladatmegoldó versenyt az első nap délelőttjén bonyolították le. Hét feladat megoldására a versenyzők öt órát fordítottak. Délután a résztvevők közös autóbuszkirándulást tettek Dél-Baranyában. A második nap programjában a versenyfeladatok megoldásainak bemutatása, majd az ünnepélyes eredményhirdetés szerepelt. A versenybizottság egyhangú döntés után 1 első, 4 második, 4 harmadik díjat adott ki; továbbá 9 versenyzőt dicséretben részesített.

A részletes eredmények:

1. díjban részesült:

Ökrös László, Eger

II. díjban részesült:

Botlik Benedek, Budapest;
Máté Bálint, Pécs;
Henczi Béla, Pécs;
Kiss Zoltán, Pécs.

III. díjat kaptak:

Mikita István, Nyíregyháza;
Bokor József, Szeged;
Horváth Katalin, Szeged;
Steierlein István, Pécs.

Dicséretben részesültek:

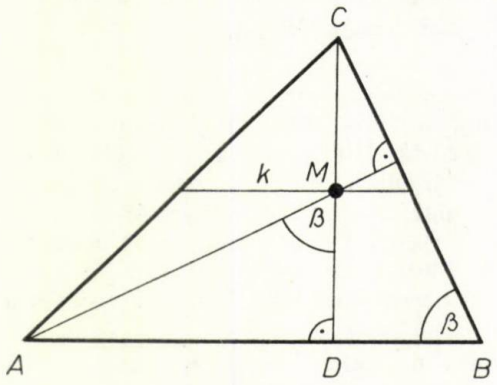
Gehér József, Budapest;
Nyári István, Szeged;
Németh Csilla, Szombathely

Szakács Éva, Szombathely;
Antal Csaba, Nyíregyháza;
Sőti Judit, Eger;
Ambrus Sándor, Budapest;
Weinémer Sándor, Nyíregyháza;
Vázsonyi Ferenc, Pécs.

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Adott a síkban két (különböző) pont: A és B. Állapítsuk meg az olyan ABC háromszögek C csúcspontjának mértani helyét, amelyeknek magasságpontja a háromszög AB oldallal párhuzamos középvonalán van!



1. ábra

I. megoldás

Nyilvánvaló, hogy e háromszögek csak hegyesszögűek lehetnek. $AMD\sphericalangle$ $\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, ezért az ADM és BDC derékszögű háromszögek hasonlóak, következésképpen

$$\frac{AD}{CD} = \frac{MD}{BD},$$

ebből és az $MD = \frac{CD}{2}$ feltételből

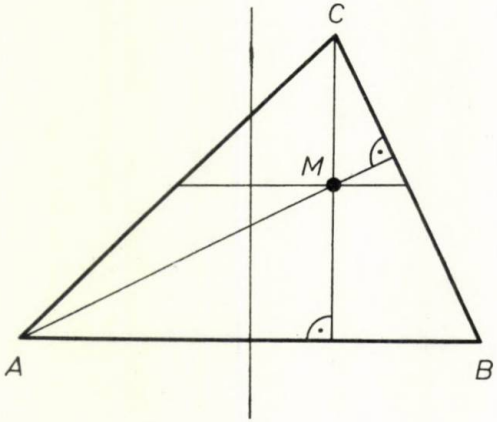
$$AD \cdot BD = MD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot CD^2 \tag{1}$$

adódik. Azoknak a P pontoknak mértani helye, amelyekre

$$AD \cdot BD = PD^2 \tag{2}$$

teljesül, az AB szakasz fölé emelt Thalész-kör. (1) és (2) összevetéséből $CD = \sqrt{2} \cdot PD$.

A C csúcs mértani helye tehát olyan ellipszis, amelynek kistengelye AB, nagytengelyének hossza $AB \cdot \sqrt{2}$, és amelyhez nem tartoznak az A és B pontok.



2. ábra

II. megoldás

Legyenek az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(x_0; y_0)$. Az m_c magasság egyenlete: $x = x_0$, az m_a magasságé pedig $(x_0 - a)x - y_0 y = a^2 - ax_0$.

Ezekből a magasságpont koordinátái:

$$M\left(x_0; \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right).$$

Figyelembe véve, hogy M a középvonalon van:

$$\frac{a^2-x_0^2}{y_0}=\frac{y_0}{2},$$

ebből

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{(a\sqrt{2})^2}=1$$

adódik, ami szerint a C csúcs az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$$

egyenletű ellipszisen van.

Megmutatjuk még, hogy az ellipszis pontjai — az A és B pontok kivételével — olyan ABC háromszög csúcsai, amelyek eleget tesznek a feladatban szereplő feltételeknek. Legyen $C(x_0, y_0)$ az ellipszis A-tól, illetve B-től különböző pontja $(y_0 \neq 0)$. Az előző gondolatmenettel M koordinátáira $\left(x_0; \frac{a^2-x_0^2}{y_0}\right)$ adódik. Felhasználva, hogy C ellipszispont

$$x_0^2+\frac{1}{2}y_0^2=a^2,$$

ebből az M pont ordinátája:

$$\frac{a^2-x_0^2}{y_0}=\frac{\frac{1}{2}y_0^2}{y_0}=\frac{y_0}{2},$$

vagyis M valóban a középvonal pontja.

2. feladat

Melyek azok az x, y, z egész számok, amelyekre

$$4^x+4^y+4^z$$

négyzetszám?

Megoldás:

Negatív egészek nem jöhetnek számításba, hiszen ilyenekre az összeg nem is egész. Feltehető, hogy $x \leqq y \leqq z$. Emeljük ki 4^x-t:

$$4^x+4^y+4^z=4^x(1+4^{y-x}+4^{z-x}).$$

A fenti akkor és csak akkor négyzetszám, ha a jobb oldali második tényező is az. Ebben $x=y$ lehetetlen, mert $2+4^{z-x}$ bármely kitevőre nem négyzetszám. $x<y$ esetben viszont a vizsgált összeg páratlan szám négyzete:

$$1+4^{y-x}+4^{z-x}=(2k+1)^2,$$

ebből

$$4^{y-x-1}(1+4^{z-y})=k(k+1). \tag{1}$$

Mivel k és $k+1$ relatív prímek, 4^{y-x-1} pedig prímhatvány, azért vagy $4^{y-x-1}|k$ vagy $4^{y-x-1}|k+1$. Nyilvánvaló továbbá, hogy $y-x-1 \leqq z-y$.

Az első esetben van olyan $t(\in N_0)$, hogy $4^{y-x-1} \cdot t = k$. Ebből (1) felhasználásával a

$$t-1 = 4^{y-x-1}(2^{z-2y+x+1}+t)(2^{z-2y+x+1}-t)$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet csak $t=1$ esetben állhat, $t>1$ esetben ugyanis a jobb oldal (a második tényező miatt) nagyobb a bal oldalnál. $t=1$ esetben $y-x-1=z-y$, ahonnan $z=2y-x-1$. Az $(x;\ y;\ 2y-x-1)$ számhármasok (ahol $0 \leqq x < y$, ezért $z=2y-x-1 \geqq y$) valóban megoldások:

$$4^x+4^y+4^z = 4^x+4^y+4^{2y-x-1} = (2^x)^2+2^{2y}+(2^{2y-x-1})^2 =$$

$$= (2^x+2^{y-x-1})^2.$$

A második esetben — az első eset vizsgálatához hasonlóan — a következő egyenlethez jutunk: $4^{y-x-1}t^2-4^{z-y}=t+1$, amely az $y-x-1=z-y$ egyenlőtlenség miatt így írható

$$4^{y-x-1}(t+2^{z-2y+x+1})(t-2^{z-2y+x+1}) = t+1,$$

amely csak $y-x-1=z-2y+x+1=0$, $t=2$ esetén áll fenn, az ebből adódó $(x, x+1, x+1)$ számhármast azonban a korábban kapott megoldásunk speciális esetként tartalmazza.

A feladat feltételeinek tehát csak az

$$(x;\ y;\ 2y-x-1) \text{ (ahol } 0 \leqq x < y)$$

számhármasok tesznek eleget.

3. feladat

Az $ABCD$ tetraéder súlypontját jelölje S. Igazoljuk, hogy az

$$SA^2+SB^2+SC^2+SD^2$$

összeg egyenlő a tetraéder élei négyzetösszegének negyedrészéve .

Megoldás:

Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a tetraéder súlypontjába, innen a tetraéder csúcsaiba mutató helyvektorokat jelölje **a, b, c, d.** Ezekre nyilvánvalóan fennáll:

(1) $$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Induljunk ki az élek négyzetösszegéből és végezzük a következő átalakítást:

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 =$$

$$= (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{d})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2 =$$

$$= 3(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2)-2(\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{ad}+\mathbf{bc}+\mathbf{bd}+\mathbf{cd}).$$

(1) négyzetre emelésével és átrendezésével

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2 = -2(\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{ad}+\mathbf{bc}+\mathbf{bd}+\mathbf{cd})$$

adódik, ezt helyettesítve pedig a feladat állítását kapjuk:

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 4(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2).$$

4. feladat

Valamely x szám egész részén értjük és $[x]$-szel jelöljük azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél. Az x szám $\{x\}$-szel jelölt törtrészét pedig az $x-[x]$ különbséggel definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=1.$$

Megoldás:

A binomiális tétel alapján

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k,$$

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k.$$

Adjuk össze a két egyenletet:

$$(a+b)^n+(a-b)^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\cdot a^{n-2k}\cdot b^{2k},$$

majd végezzük el az $a=2$, $b=\sqrt{3}$ helyettesítést:

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\cdot 2^{n-2k}\cdot 3^k.$$

A fentiekből világos, hogy $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ minden $n(\in\mathbf{N})$-re pozitív egész, törtrésze tehát 0. Viszont $(2-\sqrt{3})^n$ semmilyen n pozitív egészre sem egész, továbbá $0<(2-\sqrt{3})^n<1$ miatt $\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n=0$.

Mivel $\{(2-\sqrt{3})^n\}>0$, azért $\{(2+\sqrt{3})^n\}=1-\{(2-\sqrt{3})^n\}$. Határátmenetre térve át:

$$\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=\lim_{n\to\infty}(1-\{(2-\sqrt{3})^n\})=1-0=1,$$

amit igazolni kellett.

5. feladat

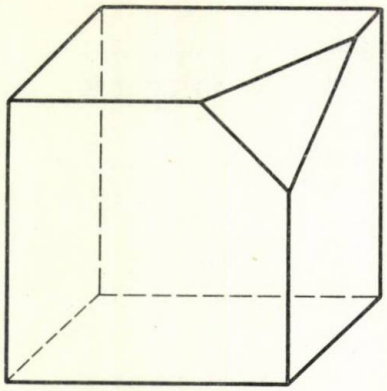
Egy konvex poliédernek csak háromszög-, négyszög- és ötszöglapjai vannak. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszöglapja és három négyszöglapja van, akkor az ötszöglapjainak száma legalább három! Létezik-e minimális számú ötszöglappal rendelkező ilyen poliéder? Ha igen, akkor vázoljuk is fel!

Megoldás:

Jelölje k az ötszöglapok számát.
Ha összeszámoljuk mindegyik poliéderlapon az éleket, akkor mindegyik poliéderélt kétszer veszünk számításba:

$$1\cdot 3+3\cdot 4+k\cdot 5=5k+15=2e,$$

ebből következik, hogy k páratlan. Ha egy ötszöglap volna, akkor ennek öt oldalához



egy-egy további lapnak kellene csatlakoznia, de ez lehetetlen, hiszen csak négy további lap (egy háromszöglap és három négyszöglap) van.

A $k \geqq 3$ állítást ezzel igazoltuk. A $k=3$ eset létezését az ábra mutatja.

3. ábra

Olvasószolgálat

Megkezdte működését a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége lapjainak olvasószolgálata Budapest, IX., Mester u. 3. szám alatt. Itt szövetségünk valamennyi szaklapja megvásárolható, előfizethető, helyben is olvasható. Az olvasószolgálat dolgozói minden felvilágosítást megadnak szaklapjainkkal kapcsolatban.

Keresse fel a MTESZ-lapok olvasószolgálatát!

Nyitvatartás: munkanapokon 10 órától 18 óráig.

HELYREIGAZÍTÁS

Lapunk 1982. évi 5. számába — sajnálatos módon — sajtóhiba csúszott:
A kecskeméti matematikus vándorgyűlésről közölt tudósításban a felső tagozatos szekció egyik előadójának a neve — elírás folytán — tévesen szerepel a 147. oldal 7. sorában.

A szabályos testek című előadást ugyanis *dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde*, a Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Geometria Tanszékének adjunktusa tartotta.

Az elkövetett hibáért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A szerkesztőség.

Kalmár László

Bevezetés a matematikai analízisbe I., II.

„A könyv az egyváltozós függvények differenciál- és integrálszámításába nyújt teljes és igen didaktikus bevezetést, Így e könyvet azok is eredményesen használhatják, akik a differenciál- és integrálszámítással ismerkednek. Különösen nagy haszonnal és élvezettel forgathatják azonban e könyvet azok, akik a kérdéskörben már járatosak és akiket elsősorban a sajátos felépítési mód, valamint a differenciál- és integrálszámítás oktatásának módszertani kérdései érdekelnek, azaz e könyv különösen ajánlható a középiskolai tanárok számára."

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10.; 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldáshoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézhezvételétől számított egy hónap.

1017. Bizonyítsuk be: ha p és q ikerprímek, akkor a p^4+4 és q^4+4 nem relatív prímek!

Bencze Mihály, Brassó

1018. Igazoljuk, hogy bármely háromszög feldarabolható n ($\geqq 4$) darab egyenlő szárú háromszögre!

1019. Bizonyítsuk be, hogy ha $0<\alpha<\frac{\pi}{2n}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 k\alpha)(1+\operatorname{tg}^2(k+1)\alpha)} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin \alpha}.$$

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

1020. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ($n \geqq 4$) pontok közül semelyik négy nincs egy síkban, és bármelyik négy pont által kifeszített tetraéder térfogata legfeljebb egy egységnyi. Igazoljuk, hogy létezik olyan $ABCD$ tetraéder, amely valamennyi pontot tartalmazza és térfogata nem több 27 egységnél!

Hazag Tibor, Budapest

1021. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok szorzata legalább egy. Mutassuk meg, hogy $k>m$ (k és m természetes számok) esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^k.$$

Bartha Gábor, Szentendre

1022. Oldjuk meg az $[1, 2]$ intervallumon a

$$8\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = 9n^2$$

egyenletet, ahol n pozitív egész!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Feladatmegoldások (993—998)

993. A természetes számok mely részhalmazaira teljesül: a részhalmaz bármely két eleme és ezek szorzata is ugyanarra a kétjegyű számra végződik?

Strohmayer János, Budapest

Megoldás: Mivel a szorzat utolsó két jegyét a tényezők utolsó két jegyének szorzata határozza meg, ezért elegendő kétjegyű számokra szorítkoznunk. Legyen tehát a $10a+b$ kétjegyű szám olyan, hogy négyzete

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2=100c+10a+b, \qquad (*)$$

ahol c természetes szám. Az egyesek száma azonban csak akkor egyenlő, ha a

$$b^2-b=b(b-1)$$

különbség, illetve szorzat a 10 többszöröse, azaz 5-tel osztható szám.

Mivel a b egyjegyű természetes szám, ezért fenti szorzatunk egyik tényezője a 0 vagy az 5, tehát $b=0$, 1, 5 vagy 6. A $(*)$-ból következik, hogy $b=0$ vagy 1 esetén $a=0$, továbbá ha $b=5$, úgy $a=2$ kell legyen. Végül, ha $b=6$, akkor a

$$20a+36-(10a+6)=10(a+3)$$

különbség, illetve szorzat a 100 többszöröse kell legyen. Az a egyjegyű természetes szám, tehát csak az $a=7$ jöhet szóba.

Összefoglalva: A feltételnek eleget tevő részhalmazok csakis az $\mathbf{N}_1=\{100k\}$; $\mathbf{N}_2=\{100k+1\}$; $\mathbf{N}_3=\{100k+25\}$ és $\mathbf{N}_4=\{100k+76\}$ lehetnek (k tetszőleges természetes szám). Könnyen látható, hogy ezek mindegyike megfelel a követelményeknek, ha a kétjegyűséget tágabban értelmezzük. Szűkebb értelmezés esetén $\mathbf{N}_3$ és $\mathbf{N}_4$ adja a megoldást.

Megjegyzés: A feladat gépi úton történő megoldásának *BASIC* nyelvű programja a következő:

```
10 FOR I=Ø TO 99
20 X = I*I
30 K = X-INT (X ÷ 1ØØ)*1ØØ
40 IF K=I THEN PRINT I, X
50 NEXT
```

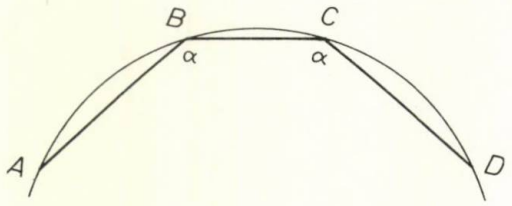
Görbe László, Budapest

A megoldók száma: 18.

994. Egy körbe írt konvex $(2n+1)$-szögnek van n darab $(n-1)\dfrac{\pi}{n}$ nagyságú szöge. Bizonyítsuk be: van két egyenlő oldala!

Lasztóczi Gyula, Budapest

Megoldás: Két esettel kell foglalkoznunk aszerint, hogy a sokszögnek van-e két szomszédos $\alpha=(n-1)\dfrac{\pi}{n}$ nagyságú szöge vagy sem. Ha van (1. ábra), akkor a BC szakaszt felező merőlegesre vonatkozó szimmetria miatt $AB=CD$, tehát igaz az állítás. Ha nincs két szomszédos α nagyságú szög, akkor az n darab α nagyságú szög a sokszög páros sorszámú csúcsaiban kell legyen (2. ábra).



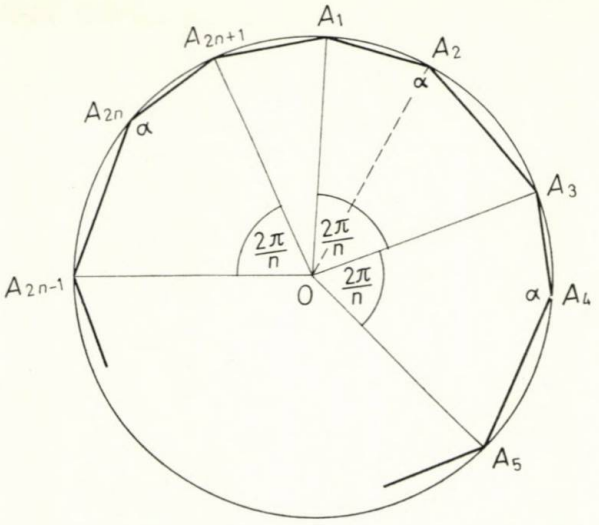
1. ábra

Tekintsük az A_1OA_3 középponti szöget! Mivel az OA_2 az $OA_1A_2A_3$ négyszöget két egyenlő szárú háromszögre darabolja, ezért a négyszög A_1, A_2, A_3 csúcsainál levő szögek összege $2\alpha=2(n-1)\dfrac{\pi}{n}=2\pi-\dfrac{2\pi}{n}$, tehát

$$A_1OA_3\sphericalangle=\frac{2\pi}{n}.$$

Sokszögünkben azonban pontosan n darab ilyen, egymást követő, egyenlő középponti szög van: $A_1OA_3\sphericalangle = A_3OA_5\sphericalangle = \ldots = A_{2n-1}OA_{2n+1}\sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$. Ezek összege 2π, tehát $A_{2n+1}OA_1\sphericalangle = 0$ kell legyen, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk az állítást.

Bogdán Zoltán, Cegléd
Varga István, Nagyszalonta



2. ábra

Megjegyzés: Megoldásunk nem szól arról, hogy létezik-e fenti tulajdonságú sokszög, ha egy kör középponti szögéből $(n+1)\frac{\pi}{n}$ nagyságút $n+1$ egyenlő részre osztunk. Az ezekhez tartozó húrok egyenlőek és két ilyen szomszédos húr adta kerületi szög $(n-1)\frac{\pi}{n}$. Az $n+1$ darab egymást követő húr n darab ilyen szöget ad. A sokszög több csúcsa a kör másik ívén van.

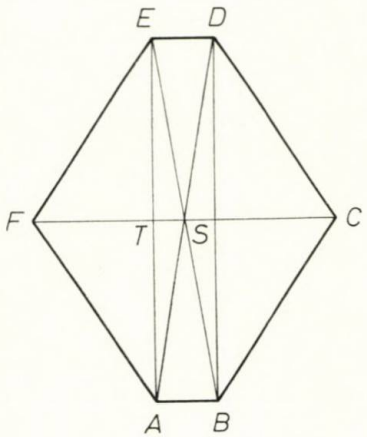
A megoldók száma: 10.

Bogdán Zoltán, Cegléd

995. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCDEF$ konvex hatszög átellenes, A, D; B, E; C, F csúcspárjait összekötő átlók akkor és csak akkor bontják a hatszöget két-két egyenlő területű négyszögre, ha az ACE és BDF háromszögek súlypontja azonos, továbbá a két háromszög erre a pontra középpontosan hasonló!

Ratkó István, Budapest

Megoldás: A feladat „csak akkor" állítása nem igaz. Ellenpéldát ad a 3. ábrán látható, az AB oldal felezőmerőlegesére és az FC átlóra szimmetrikus $ABCDEF$ hatszög, amelyben a DA és EB átlók S metszéspontja nem 1:2 arányban osztja a TC szakaszt. Ilyen hatszöghöz jutunk, ha az $ABCT$ derékszögű trapézban $AB \neq \frac{2}{3} \cdot TC$.

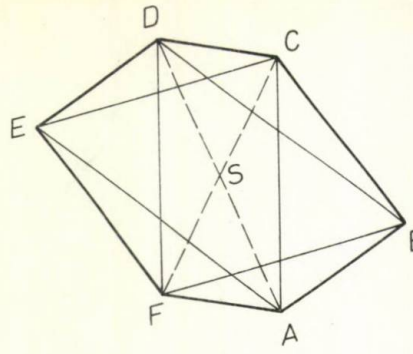


3. ábra

Ekkor AD, BE és CF területfelezők, az ACE és BDF háromszögek középpontosan hasonlók, de a két háromszög súlypontja nem azonos.

Ezért a következőt bizonyítjuk: Az *$ABCDEF$ konvex hatszög átellenes csúcspárjait összekötő átlók akkor és csak akkor területfelezők, ha az ACE és BDF háromszögek középpontosan hasonlók.*

1. Legyen AD, BE és CF területfelező. Világos, hogy ekkor például az SDC és SAF háromszögek területe egyenlő, mert bármelyiket ezek közül az $SABC$ négyszöggel egyesítve félterületet kapunk (4. ábra).



4. ábra

Ezért $SA \cdot SF = SC \cdot SD$, amiből

$$\frac{SA}{SD} = \frac{SC}{SF}, \tag{1}$$

következésképpen

$$AC \| FD. \tag{2}$$

Ugyanígy bizonyítható, hogy $CE \| FB$ és $EA \| BD$. De akkor az ACE és BDF háromszögek oldalai páronként párhuzamosak, tehát a két háromszög hasonló helyzetű, azaz középpontosan is hasonló. Mivel az A, D, és C, F megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek S-ben metszik egymást, ezért a B, E megfelelő pontokat összekötő egyenes is átmegy az S ponton. Ezzel beláttuk, hogy a két háromszög az S-re középpontosan hasonló.

2. Legyen az ACE és BDF középpontosan hasonló háromszögek hasonlósági középpontja S. Mivel a középpontos hasonlóságban a megfelelő szakaszok párhuzamosak, ezért (2) fennáll és ebből (1) következik. Emiatt $SA \cdot SF = SC \cdot SD$, tehát az SCD és az SAF háromszögek területe egyenlő.

Hasonlóan kapjuk, hogy az SBC és az SEF, valamint az SAB és az SDE háromszögek területe is egyenlő. Emiatt az AD, BE és CF egyenesek bármelyike területfelező. Megjegyezzük, hogy az eredeti feladat feltételei elégségesek. Ekkor speciálisan az S pont a két háromszög súlypontja is.

Az S pontot a hatszög (lemez) súlypontjaként értelmezhetjük.

Bogdán Zoltán, Cegléd

A megoldók száma: 3.

996. Jelölje S_n, illetve C_n azt az $n \times n$-es determinánst, amelynek i-edik sorában a j-edik elem $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right)$, illetve $\cos\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right)$. Határozzuk meg minden pozitív egész n-re e determinánsokat!

Gáspár Gyula, Miskolc

Megoldás: Legyen $\sin\frac{\pi}{k} = x_k$ és $\cos\frac{\pi}{k} = y_k$.

Az addiciós összefüggésekből

$$\sin\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right) = x_i y_j + x_j y_i$$

és

$$\cos\left(\frac{\pi}{i}+\frac{\pi}{j}\right) = y_i y_j - x_i x_j$$

adódik. Bebizonyítjuk, hogy $n \geqq 3$-ra $S_n = C_n = 0$.

Tekintsük az S_n első oszlopának elemeit:

$$x_k y_1 + x_1 y_k \quad (1 \leqq k \leqq n).$$

Ezért S_n két olyan determináns összegére bontható, melyeknek első oszlopában az $x_k y_1$, illetve az $x_1 y_k$ elemek állnak, a további oszlopok pedig az S_n megfelelő oszlopaival azonosak.

Azaz kiemelés után

$$S_n = y_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_1 y_3 + x_3 y_1 \dots \\ x_2 & x_2 y_2 + x_2 y_2 & x_2 y_3 + x_3 y_2 \dots \\ \vdots & & \\ x_k & x_k y_2 + x_2 y_k & x_k y_3 + x_3 y_k \dots \\ \vdots & & \\ x_n & x_n y_2 + x_2 y_n & x_n y_3 + x_3 y_n \dots \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} y_1 \dots \dots \\ y_2 \dots \dots \\ \vdots \\ y_k \dots \dots \\ \vdots \\ y_n \dots \dots \end{vmatrix}.$$

Ha most az első tag első oszlopának $(-y_2)$-szörösét a második, $(-y_3)$-szorosát a harmadik oszlophoz adjuk, akkor a második oszlop elemei x_2y_k, míg a harmadik oszlopé x_3y_k. Eszerint S_n első tagja nulla, mert a második oszlop $\frac{x_3}{x_2}$-szöröse a harmadik oszlop. Hasonlóan bánhatunk el S_n második tagjával: az első oszlop $(-x_2)$-szörösét a második, $(-x_3)$-szorosát a harmadik oszlophoz adjuk. Így ismét olyan determinánshoz jutottunk, melynek harmadik oszlopa a második $\frac{y_3}{y_2}$-szöröse. Ezzel beláttuk, hogy $n\geqq 3$-ra $S_n=0$.

Fentiekkel azonos módon látható be, hogy $n\geqq 3$-ra $C_n=0$. Mivel

$$S_1=|\sin 2\pi|=0,\quad S_2=\begin{vmatrix}\sin 2\pi & \sin\frac{3\pi}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{2} & \sin\pi\end{vmatrix}=-1,\quad S_n=0\quad (n\geqq 3);$$

$$C_1=|\cos 2\pi|=1,\quad C_2=\begin{vmatrix}\cos 2\pi & \cos\frac{3\pi}{2}\\ \cos\frac{3\pi}{2} & \cos\pi\end{vmatrix}=-1,\quad C_n=0\quad (n\geqq 3),$$

így valamennyi n-re megadtuk a választ.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A megoldók száma: 7.

997. Az (a_n) valós számsorozatot súlyozott számtani sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan α, β pozitív valós számpár, hogy $\alpha+\beta=1$ és minden $n(\geqq 2)$-re

$$a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n+1}.$$

Legyen (b_n) pozitív egészekből álló számtani sorozat. Igazoljuk, hogy akkor bármely (a_n) súlyozott számtani sorozat (a_{b_n}) részsorozata is súlyozott számtani sorozat!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Megoldás: A **991.** feladat szerint (a_n) akkor és csak akkor súlyozott számtani sorozat, ha található olyan (g_n) monoton mértani sorozat és a_0 valós szám, hogy minden n-re $a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n} g_k$. A feladat megoldása során azt kaptuk, hogy

$$g_k=(a_1-a_0)q^{k-1},\quad q=\frac{\alpha}{\beta},$$

és ezért

$$a_n=a_0+(a_1-a_0)\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{1}$$

Feltehető, hogy $q\neq 1$, azaz (a_n) nem egyszerű számtani sorozat, mivel erre a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül. Legyen a (b_n) számtani sorozat differenciája d. Azt kell igazoljuk, hogy létezik olyan $\gamma(0<\gamma<1)$, hogy minden $n(\geqq d)$-re.

$$a_n=\gamma a_{n-d}+(1-\gamma)a_{n+d}, \tag{2}$$

más szóval γ független n-től és $0<\gamma<1$.

Az (1) alapján (2) így alakul:

$$a_0+(a_1-a_0)\frac{q^n-1}{q-1}=\gamma\left[a_0+(a_1-a_0)\frac{q^{n-d}-1}{q-1}\right]+(1-\gamma)\left[a_0+(a_1-a_0)\frac{q^{n+d}-1}{q-1}\right].$$

Ezt egyszerűbb alakra hozva, majd γ-t kifejezve:

$$q^n=\gamma q^{n-d}+(1-\gamma)q^{n+d}$$

és így q^{d-n}-nel bővítve

$$\gamma = \frac{q^n - q^{n+d}}{q^{n-d} - q^{n+d}} = \frac{q^d - q^{2d}}{1 - q^{2d}} = \frac{q^d}{q^d + 1}.$$

Erről pedig látható, hogy $0 < \gamma < 1$ és γ független az n-től. Az előbbiek alapján feltehettük, hogy $a_0 \neq a_1$, $q \neq 0$ vagy 1.

Az így nyert γ értékkel az (a_n) súlyozott számtani sorozat (a_{b_n}) részsorozata is súlyozott számtani sorozat, mivel a (2) összefüggés teljesül rá. Ezzel az állítást igazoltuk.

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 13.

998. Bizonyítsuk be:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n}{n+k} \binom{n}{k} = \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Ismeretes (*B. P. Gyemidovics:* Matematikai analízis. Feladatgyűjtemény, 114. oldal), hogy

$$(*) \qquad (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f_{(x)}^{(m)} \cdot g_{(x)}^{(n-m)}.$$

Legyen $f(x) = x^{2n}$ és $g(x) = x^{-n}$. Ezekkel (*) így alakul:

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (x^{2n})^{(m)} \cdot (x^{-n})^{(n-m)},$$

amiből

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (2n)(2n-1)\dots(2n-m+1) x^{2n-m} \cdot n(n+1)\dots(n+n-m-1) x^{-n-(n-m)} \cdot (-1)^{n-m}.$$

Legyen $x = 1$, akkor előbbi sorunkból

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(2n)!}{(2n-m)!} \cdot \frac{(2n-m-1)!}{(n-1)!} (-1)^{n-m},$$

ahonnan $(2n-m-1)!$-sal egyszerűsítve és n-nel bővítve a jobb oldalt

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{n}{n+n-m} \binom{n}{m}$$

adódik.

Legyen most $k = n - m$, akkor előző sorunkból

$$\binom{2n}{n}^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n}{n+k} \binom{n}{k},$$

és ezt kellett bizonyítsuk.

A megoldók száma: 5.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók névsora (993—998.)

Bagi Gábor, Barcs (993.) Bencze Mihály, Brassó (996—998.); Bogdán Zoltán, Cegléd (993—995., 997.); Csorba Ferenc, Győr (997.); Csörsz Sándor, Dunakeszi (993., 994., 997.); Giczi Margit, Sümeg (993., 994., 997.); Görbe László, Budapest (993. 2. mód.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (993.); Hornyák Pál, Érsekújvár (993—995., 998.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (993., 996., 997.); Kamarás Lajos, Pécs (993—998.); Kormos Gizella, Sümeg, (993.); dr. Major Pál, Budapest (993.); Nyírő László, Mezőkövesd (993., 996., 997.); Rischákné Kishalmi Róza, Hódmezővásárhely (994., 996.); Szánthó Gyula, Gyula (993. 2. mód., 994., 997.); Torkos Ferenc, Sümeg (993.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (993., 994., 996—998.); Varga István, Nagyszalonta (993., 994., 997., 998.); Zalán Péterné, Budapest (993., 997.); Zsidó György, Kolozsvár (993., 994., 996., 997.).

Ára: 5,50 Ft

INDEX: 25 565